MECCANICA DEI FLUIDI

fluidi: stato di aggregazione della materia / non è capace di mantenere la propria forma
→ scorrono, fluiscono sotto l'azione di forze

forze intermolecolari + deboli che nei solidi

FLUIDI → liquidi: incomprimibili → mantengono il volume [forze intermolecolari limitate a molecole vicine]
↘ gas: forze intermolecolari trascurabili, comprimibili e non preservano il volume

Elemento di volume dV (volume infinitesimo): volume molto piccolo da $\rho\, dV$: macroscopico (~ una goccia) ma ancora sufficientemente grande da contenere tante molecole da poter essere considerato continuo.

In questa approssimazione, il fluido è descritto in termini di 2 proprietà: DENSITÀ e PRESSIONE

DENSITÀ DI MASSA (MASSA VOLUMICA): $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ per liquidi ρ uniforme → INCOMPRIMIBILI

per gas $\rho(\vec{r})$ → COMPRIMIBILI

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

PRESSIONE: l'alterazione dello stato di moto del fluido è descritta da una forza distribuita in modo continuo sulla superficie che lo racchiude.
→ un fluido non può sostenere l'azione di una forza localizzata in un punto

$$P_{media} = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$ pressione → è una quantità scalare

- ΔF componente normale a ΔS della forza totale su ΔS

$$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{m\ell t^{-2}}{\ell^2} = m\ell^{-1}t^{-2}$$ SI: $N/m^2 = Pa$ PASCAL

bar: $1\,bar = 10^5\,Pa$
atmosfera: $1\,atm = 1.013 \times 10^5\,Pa$
$mmHg = torr = 1/760\,atm$

FLUIDI IN QUIETE

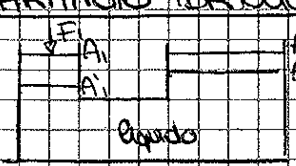
la forza totale su ogni parte del fluido è nulla → EQUILIBRIO IDROSTATICO

se non agiscono forze esterne ⇒ P UNIFORME

PRINCIPIO DI PASCAL

Un cambiamento di pressione in una parte di fluido si trasmette invariato in tutto il volume del fluido e alle pareti del contenitore

MARTINETTO IDRAULICO



$$\Delta P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$ se $A_2 >> A_1$

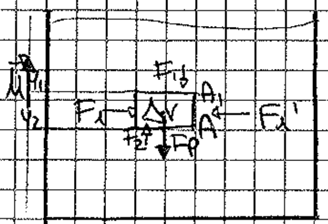
$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 >> F_1$$

liquido incomprimibile → ρ = costante

$\Delta V_1 = \Delta V_2$ $\quad \Delta V_1 = A_1 y_1 = A_2 y_2 = \Delta V_2$ $\quad y_2 = \frac{A_1}{A_2} y_1 << y_1$

Lavoro fatto dal pistone A_2: $L_2 = F_2 y_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 \frac{A_1}{A_2} y_1 = F_1 y_1 = L_1$

EQUILIBRIO IDROSTATICO IN PRESENZA DI FORZA PESO



Consideriamo l'elemento di volume / ρ = uniforme

Studiamo le forze che agiscono su ΔV

$$\Delta V = \overset{\text{sezione}}{A}(y_1 - y_2)$$

equilibrio per $F_1 = F_1'$

$$y:\ \vec{F_1} = (-\vec{\mu_y}) P_1 \cdot A \quad , \quad \vec{F_2} = +\vec{\mu_y} P_2 \cdot A \quad , \quad \vec{F_p} = -\vec{\mu_y}\, \overbrace{\rho \Delta V}^{\Delta m} g$$

equilibrio in direzione y: $P_2 A = P_1 A + \rho \Delta V g$

$$(P_2 - P_1)\cancel{A} = \rho g (y_1 - y_2)\cancel{A} \Rightarrow \boxed{P_2 - P_1 = \rho g (y_1 - y_2)}$$

LEGGE DI STEVINO

$y_2 = y_1 - h$ h misura la profondità

$$\boxed{P_2 - P_1 = \rho g h}$$

- La pressione in un qualsiasi punto in equilibrio idrostatico dipende solo dalla PROFONDITÀ

A quale profondità devo scendere in acqua per avere P doppia della P atmosferica?

$P_0 = 1\ \text{atm} \sim 10^5\ \text{Pa}$

$P = 2P_0 = 2\ \text{atm}$

$$P - P_0 = \rho g h$$

$$h = \frac{P - P_0}{\rho g} = \frac{P_0}{\rho g} = \frac{10^5\ \text{Pa}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10\ \text{m}$$

Fossa delle Marianne $h = 11.3\ \text{km} = 11300\ \text{m}$

$$P - P_0 = \rho g h$$

$$P = \rho g h + P_0 = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 11.3 \cdot 10^3\ \text{m} + 10^5\ P_0 = 1.1 \cdot 10^8\ P_0 + 10^5\ P_0 =$$

$$= 1.11 \cdot 10^8\ P_0$$

Calcoliamo la pressione dell'aria in funzione di quota

$$P - P_0 = -\rho g (y - y_0) = \qquad \rho(P) = kP$$

$$= -\rho(P) g (y - y_0)$$

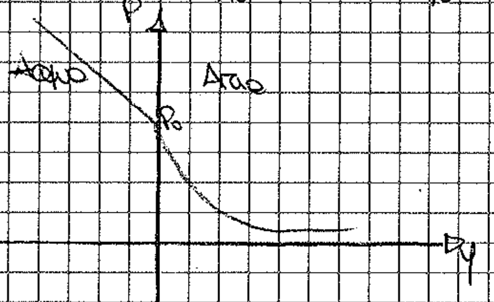
$$\boxed{\Rightarrow dP = -\rho(P) g\, dy} \qquad dP = -kg\, P\, dy$$

$$\frac{dP}{P} = -kg\, dy$$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -kg \int_{y_0}^{y} dy \qquad \log P - \log P_0 = -kg(y - y_0)$$

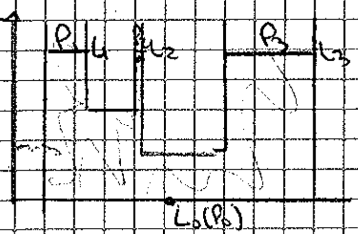
$$\ln \frac{P}{P_0} = -kg(y - y_0)$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{-kg(y - y_0)}$$



$$\boxed{P = P_0 \cdot e^{-kg(y - y_0)}}$$

VASI COMUNICANTI

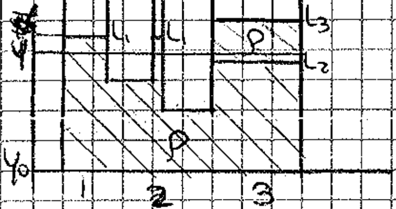


$P_1 = P_2 = P_3 = P_{atm}$

$P_1 = P_0 - \rho g (L_1 - L_0)$

$P_2 = P_0 - \rho g (L_2 - L_0)$ $\Rightarrow L_1 = L_2 = L_3$

$P_3 = P_0 - \rho g (L_3 - L_0)$



Calcoliamo la pressione all'altezza y nei 3 vasi

$P_2 - P_1 = \rho g (y_1 - y_2)$

$P_1(y) = P(0) - \rho g y = P_A + \rho g (L_1 - y)$

$P_3(y) = P(0) - \rho g L_2 - \rho' g (y - L_2) =$

$= P_A + \rho' g (L_3 - y)$ $\neq P_1(y)$

$P_0 - \cancel{\rho g y} = P_A + \rho g (L_1 - y)$

$P_0 - \rho g L_2 - \rho' g (y - L_2) = P_A + \rho g (L_3 - y)$

$\rho g L_2 - \rho' g L_2 = \rho g L_1 - \rho' g L_3$

$(\rho - \rho') g L_2 = \rho g L_1 - \rho' g L_3$

$\rho (L_2 - L_1) = \rho' (L_2 - L_3)$

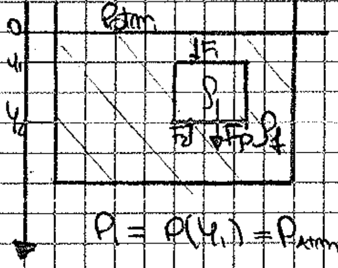
$$\boxed{\frac{\rho'}{\rho} = \frac{L_2 - L_1}{L_2 - L_3} = \frac{L_1 - L_2}{L_3 - L_1}}$$

$\rho' > \rho \Rightarrow L_1 - L_2 > L_3 - L_2$

$\rho' < \rho \Rightarrow L_1 < L_3$

$P_2 - P_1 = \rho g (y_1 - y_2)$

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE



Forze esterne sul corpo

- $F_p = mg$ verso il basso
- Forze di pressione esercitate dal fluido $F_1 = P_1 A \downarrow$ $F_2 = P_2 A \uparrow$

$P_1 = P(y_1) = P_{Atm} + \rho_f g y_1$

$P_2 = P(y_2) = P_{atm} + \rho_f g y_2$

SPINTA DI ARCHIMEDE

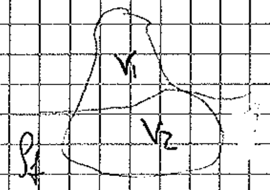
Forza totale verso l'alto

$\rho A h$

$F = F_2 - F_1 - mg = (P_2 - P_1)A - mg = \rho_f g h A - mg$

$F = (\rho_f - \rho) g A h$ ← $\rho > \rho_f$: corpo affonda

$\rho < \rho_f$: galleggia



$V = V_1 + V_2$

ρ

Forze sul corpo $\begin{cases} F_P = mg = \rho V g \downarrow \\ F_A = \rho_f V_2 g \uparrow \end{cases}$

Equilibrio $\rho V \cancel{g} = \rho_f V_2 \cancel{g}$ $\qquad \frac{V_2}{V} = \frac{\rho}{\rho_f} = 1 - \frac{V_1}{V}$

STRUMENTI PER MISURARE LA PRESSIONE

pressione $\to$ manometro

pressione atmosferica $\to$ barometro

TORRICELLI $\to$ equilibrio $\qquad P_A = P_C = \rho_{Hg}\, g\, h$

DINAMICA DEI FLUIDI

Condizioni STAZIONARIE: densità e velocità del fluido sono funzioni solo delle coordinate del punto (= dell'elemento di volume)

$\Rightarrow$ In condizioni stazionarie ogni elemento di fluido segue una ben determinata traiettoria $\Rightarrow$ LINEA DI FLUSSO

FLUIDI PERFETTI: incomprimibili, non viscosi, in moto stazionario e irrotazionale

non viscosi $\downarrow$ conserva l'energia meccanica

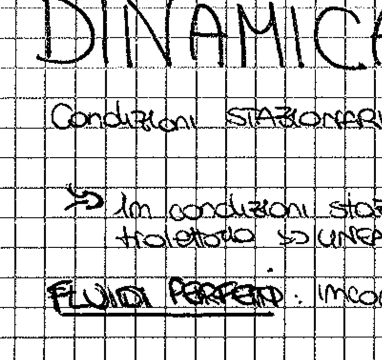
irrotazionale $\downarrow$ ogni dV ha momento angolare nullo rispetto a ogni punto

STAZIONARIO

Linee di flusso sono tangenti a $\vec{v}$ $\forall P$

2 linee di flusso non si possono mai intersecare

TUBO DI FLUSSO: insieme di linee di flusso attraverso superficie A
sup. esterna di tubo di flusso non può mai essere attraversata



Consideriamo un tubo di flusso / $\vec{v}$ costante su A $\perp$

Δt piccolo $\qquad \Delta l_1 = v_1 \cdot \Delta t$
$\qquad \Delta l_2 = v_2 \cdot \Delta t$

Suppongo no pozzi né sorgenti: ρ non dipende da t

Conservazione della massa:

$\Delta m_1 = \Delta m_2 \qquad \Delta V_1 = A_1 \Delta l_1 = A_1 v_1 \Delta t$

$\Delta V_2 = A_2 \Delta l_2 = A_2 v_2 \Delta t$

$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow \boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2}$ equazione continuità

$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \underline{Av = Q \text{ portata}}$

CONSERVAZIONE ENERGIA: BERNOULLI

Forze esterne che agiscono su un tubo di flusso tra A_1 e A_2

① $F_1 = P_1 A_1$ agevola il moto

② $F_2 = -P_2 A_2$ si oppone al moto

③ $\vec{F_3} \perp \vec{v}$

④ $F_{p\Delta r} = \Delta m\, g = \rho A_1 v_1 g \Delta t \qquad F_{pr} = mg \qquad m = \rho \cdot$ vol tra A_1 e A_2

Lavoro totale di forze esterne in Δt

① $L_1 = \vec{F_1} \cdot \Delta \vec{e_1} = P_1 A_1 v_1 \Delta t$

② $L_2 = \vec{F_2} \cdot \Delta \vec{e_2} = -P_2 A_2 v_2 \Delta t$

③ $\vec{F_3} \cdot (\vec{v} \Delta t) = 0 \qquad (\vec{F_3} \perp \vec{v})$

④ $L_p = E_p(z_1) - E_p(z_2) = \rho_1 g A_1 v_1 \Delta t z_1 - \rho g A_2 v_2 \Delta t z_2$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = (P_1 \overbrace{A_1 v_1}^{Q} - P_2 \overbrace{A_2 v_2}^{Q} + \rho g \overbrace{A_1 v_1}^{Q} z_1 - \rho g \overbrace{A_2 v_2}^{Q} z_2)\Delta t$$

$$= E_k(v_2) - E_k(v_1) = \frac{1}{2}\Delta m_1 v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m_2 v_1^2 =$$

PORTATA
$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2)$

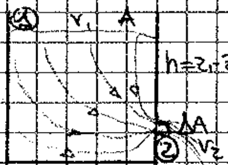
$$= \frac{1}{2}\rho \overbrace{A_2 v_2}^{Q} \Delta t\, v_2^2 - \frac{1}{2}\rho \overbrace{A_1 v_1}^{Q} \Delta t\, v_1^2$$

$$\Rightarrow \cancel{Q \Delta t}\left[P_1 - P_2 + \rho g z_1 - \rho g z_2\right] = \left[\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2\right]\cancel{Q\Delta t}$$

$$\boxed{P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2} = \underline{\text{costante}}$$

• se $v = 0 \rightsquigarrow v_1 = 0,\ v_2 = 0 \Rightarrow$ legge di STEVINO

$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \Rightarrow P_2 - P_1 = \rho g (z_1 - z_2)$$



$\Delta A << A$

Velocità di efflusso?

Consideriamo un tubo di flusso che collega A e ΔA

equazione continuità $\quad A v_1 = \Delta A v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{\Delta A}{A} v_2 \to 0$

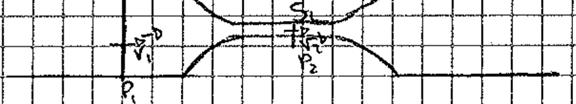
$$P_1 + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_1^2} + \rho g z = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_1 - P_2 + \rho g (z_1 - z_2) = \cancel{P_1} - \cancel{P_2} + \rho g h \qquad P_1 = P_2 = P_{atm}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{\rho} v_2^2 = \cancel{\rho} g h \qquad \boxed{v_2 = \sqrt{2gh}}$$

TEOREMA DI TORRICELLI

TUBO DI VENTURI



$z_1 = z_2$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho \frac{S_1^2}{S_2^2} v_1^2 + P_2 \rightsquigarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right] v_1^2 \frac{S_1^2}{S_1^2}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho Q^2 \left[\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right]$$

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho\frac{Q^2}{S_1^2} = P_2 + \frac{1}{2}\rho\frac{Q^2}{S_2^2}} \rightsquigarrow P + \frac{\rho Q^2}{2 S^2} = \text{costante}$$

Quando S diminuisce P diminuisce (v aumenta)