MECCANICA - CINEMATICA

scienza che studia il moto

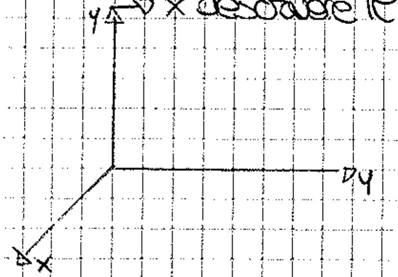
- quantità di moto
- forza
- energia

NEWTON: CINEMATICA → studio del moto indipendentemente da cause che lo hanno generato

DINAMICA → studio del moto in relazione alle cause che lo determinano

Un oggetto è in moto se la sua posizione rispetto a un dato osservatore cambia nel tempo → il moto è un concetto relativo

x descrivere il moto occorre definire il SISTEMA DI RIFERIMENTO dell'osservatore



- sistema di riferimento spaziale
- strumento per misurare le distanze
- strumento per misurare gli intervalli di tempo

Studio del moto per un punto materiale

TRAIETTORIA: curva nello spazio descritta dalla particella in moto al passare del tempo

VETTORE SPOSTAMENTO $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \quad t_2 > t_1$

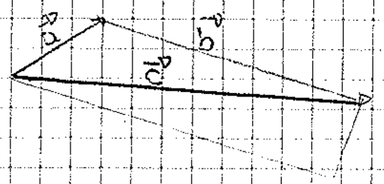
I VETTORI

VERSORE: $\hat{r} \stackrel{def}{=} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$ adimensionale

↳ identifica direzione e verso (la lunghezza è unitaria)

vettore $\vec{r} = r \cdot \hat{r}$

SOMMA VETTORIALE



- proprietà commutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- proprietà associativa: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- $\exists$ l'inverso e l'elemento neutro

MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

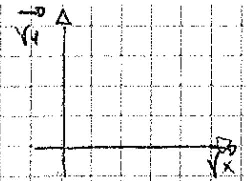
- proprietà distributiva: $a(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = a\vec{r}_1 + a\vec{r}_2$

$(a+b)\vec{r}_1 = a\vec{r}_1 + b\vec{r}_1$

- compatibilità: $a(b\vec{r}) = (ab)\vec{r}$
- identità: $1\vec{r} = \vec{r}$

$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ vettori componenti

$\{\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n\} : \forall \vec{r} \in V \quad \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \vec{r} = \sum_i a_i \vec{r}_i$



$\nexists\, a \in \mathbb{R} : \vec{v}_y = a\,\vec{v}_x$

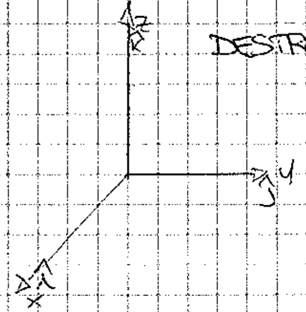
$\vec{v} \in \mathbb{V}^2 \;\; \exists a, b \in \mathbb{R} : \vec{v} = a\,\vec{v}_x + b\,\vec{v}_y$ 2 dimensioni

$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$ n dimensioni

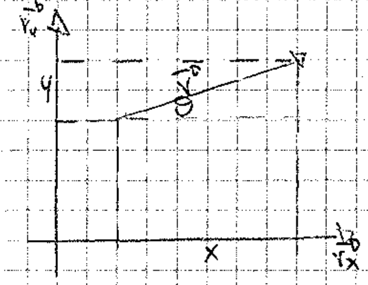
$\vec{v} = \underbrace{x\,\vec{v}_x}_{} + \underbrace{y\,\vec{v}_y}_{}$

vettori componenti

componenti (scalari)



DESTRORSO



$|\vec{v}| = r \stackrel{def}{=} r = \sqrt{x^2+y^2}$

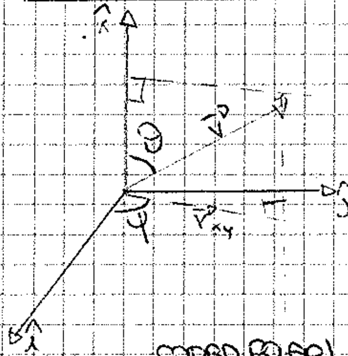
$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$\alpha\,rad \stackrel{def}{=} \frac{l}{r}$

$360° \rightsquigarrow 2\pi$

COORDINATE SFERICHE



$r = |\vec{v}|$

$z = r\cos\theta$

$v_{xy} = r\sin\theta$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

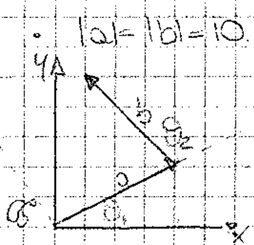
COORD. POLARI → CARTESIANE

$(r, \theta, \varphi) \to (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$

$(x, y, z) \to (r, \theta, \varphi) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$

coordinate cilindriche $(r, \varphi, z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ z\right)$

- $|a| = |b| = 10.0$ $\quad \theta_1 = 30°$



$\theta_2 = 135°$

$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10\,\vec{i} + \frac{1}{2}\cdot 10\,\vec{j} = 5\sqrt{3}\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$

$\vec{b} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 10\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 10\,\vec{j} = -5\sqrt{2}\,\vec{i} + 5\sqrt{2}\,\vec{j}$

$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = (5\sqrt{3} - 5\sqrt{2})\vec{i} + (5 + 5\sqrt{2})\vec{j} = 5\vec{i}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 5\vec{j}(1+\sqrt{2})$

$\vec{r}_x = 5(\sqrt{3}-\sqrt{2})\vec{i}$

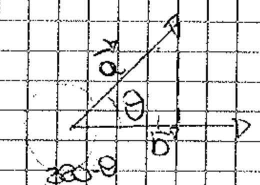
$\vec{r}_y = 5(1+\sqrt{2})\vec{j}$

$|r| = 12.2$

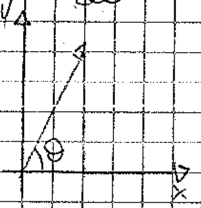
$\theta = tg^{-1}\frac{5(1+\sqrt{2})}{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 82.5°$

PRODOTTO SCALARE

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos\theta}$$ è uno scalare



$\vec{a} \cdot \vec{b} = b \cdot$ (proiezione di $\vec{a}$ su $\vec{b}$) =
= a (proiezione di $\vec{b}$ su $\vec{a}$)



$r_x = \vec{r} \cdot \hat{i} = |\hat{i}|\, r \cos\theta = |\hat{i}|\, x = x$

$r_y = \vec{r} \cdot \hat{j} = y$

$r_z = \vec{r} \cdot \hat{k} = z$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \max$ se $\theta = 0 + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \cos\theta = 1 \qquad \vec{a} \parallel \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ se $\theta = \pi/2 + k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \cos\theta = 0 \qquad \vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$

$\vec{V} \cdot \hat{i} = V_x(\underbrace{\hat{i} \cdot \hat{i}}_{1}) + V_y(\underbrace{\hat{j}\,\hat{i}}_{0}) + V_z(\underbrace{\hat{k}\,\hat{i}}_{0}) = V_x$

PROPRIETÀ

- $\vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$ distributivo somma
- $\vec{a}\,(\alpha \vec{b}) = \alpha\,(\vec{a}\,\vec{b})$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ commutativo
- $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff a = 0$ definito positivo

$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

$\underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k})(b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) =$

$= \underline{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$

$\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

$\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$

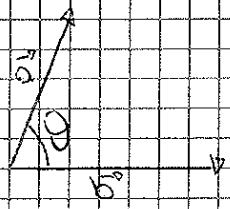
determinare l'angolo compreso tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$\cos\theta = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)/ab = (-6)/(5 \cdot \sqrt{13}) = -\frac{6}{5\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = -\frac{6\sqrt{13}}{5 \cdot 13}$

$\theta = 109°$

PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\theta \\ \text{direzione: } \perp \text{ al piano di } a \text{ e } b \\ \text{verso: regola della mano destra} \end{cases}$$



$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \qquad \vec{a} \parallel \vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = max = ab \qquad \vec{a} \perp \vec{b}$

$\hat{i} \times \hat{i} = 0 \qquad \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ sistema destroso

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

PROPRIETÀ:

- $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k})(b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) =$$
$$= a_x(b_y \hat{k} - b_z \hat{j}) + a_y(-b_x \hat{k} + b_z \hat{i}) + a_z(b_x \hat{j} - b_y \hat{i}) =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

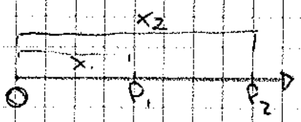
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

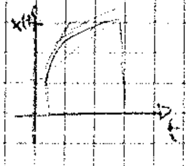
MOTO RETTILINEO (UNIDIMENSIONALE)

$x = f(t)$ $\quad x = x(t)$ $\quad t_1$ $\quad x(t_1) = x_1$

$\vec{u}_x$ $\quad t_2 > t_1$ $\quad x(t_2) = x_2$

$|\vec{u}_x| = 1$ $\quad \Delta x = x_2 - x_1$ $\quad \Delta t = t_2 - t_1$





$$\langle v \rangle = \bar{v} = v_m \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

velocità media

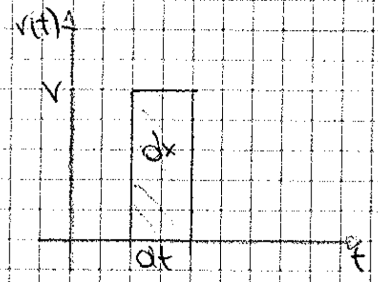
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

velocità istantanea

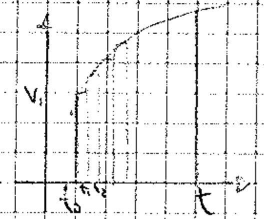
ANALISI DIMENSIONALE: $[v] = \frac{l}{t}$ $\quad$ S.I. m/s

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \qquad \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt'}\,dt' = \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = x(t) - x(t_0)$$

$$\boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'}$$



$$v = \frac{dx}{dt} \rightsquigarrow dx = v(t)\,dt$$



$$\Delta x = dx_1 + dx_2 + \dots = v_1\,dt_1 + v_2\,dt_2 + \dots = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} v_i\,dt_i =$$

$$= \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$dx = v\,dt \qquad dx > 0 \longleftrightarrow v > 0$$

$$dx < 0 \longleftrightarrow v < 0$$

- $x(t) = 3t^2 - 2$

  calcolare la v_m tra $t_1 = 2s$ e $t_2 = 3s$

  $$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(3) - x(2)}{(3-2)} = \frac{(25-10)}{1} = 15\ m/s$$

  $$v(t) = 6t \qquad v(2) = 12\ m/s$$

- Una particella si muove con $v = v_0 = 2\ m/s$

  Ricavare la funzione $x(t)$ tra $t_0 = 1s$ e t sapendo che $x(t_0) = 0$

  $$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

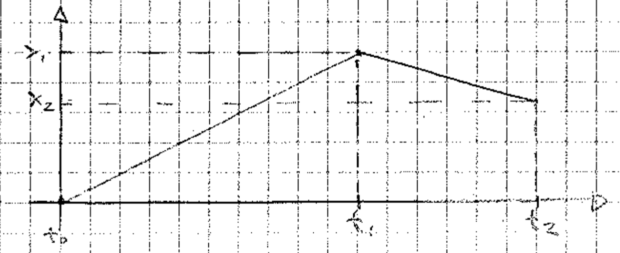
  $$x(t) = x(t_0) + v_0 \int_{t_0}^{t} dt' = 2(t-1) = 2t - 2$$

• Una macchina si muove con velocità costante da $x_0=0$ in $t_0=0$

a $x(t_1)=x_1=1\,km$ a $t_1=10\,s$

In t_1 l'autista frena e inverte il moto: procede con velocità costante fino a raggiungere in $t_2=16\,s$ $x_2=700\,m$

- Disegnare il grafico $x(t)$ $t_0<t<t_2$



- Calcolare v_m in $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ $\quad v_m = \frac{1000\,m}{10\,s} = 100\,m/s$

$\Delta t_2 = t_2 - t_1 \quad v_m = \frac{-300}{6} = -50\,m/s$

$\Delta t = t_2 - t_0 \quad v_m = \frac{700}{16} = 43.75\,m/s$

ACCELERAZIONE

$t_1, \quad v(t_1)=v$

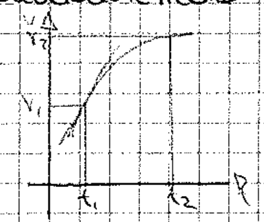
$t_2>t_1 \quad v(t_2)=v_2$

$$a_m = \langle a \rangle = \bar{a} = \frac{v_2 - v_2}{t_2 - t_1}$$

accelerazione media

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

accelerazione istantanea



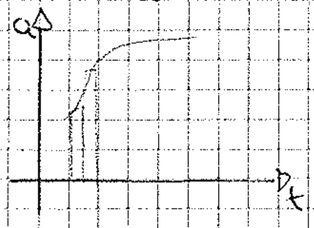
$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$[a] = \frac{[v]}{t} = \frac{l\,t^{-1}}{t} = l\,t^{-2} \qquad S.I. \; m/s^2$$

$$\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt}\,dt = \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = v(t) - v(t_0)$$

$$\boxed{v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'}$$

$dv = a\,dt$



$$\Delta v = dv_1 + dv_2 + \dots =$$
$$= a_1\,dt_1 + a_2\,dt_2 + \dots =$$
$$= \sum_i a_i\,dt = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$a(t) = a(x(t)) \qquad v = \frac{dx}{dt} \qquad dv = a\,dt$

$$v \cdot dv = \frac{dx}{dt}\,a(t)\,dt = a(x)\,\frac{dx}{dt}\,dt = a(x)\,dx$$

$$x(t) \Rightarrow dx = \frac{dx}{dt}\,dt$$

MECCANICA - DINAMICA

gravità
tensione vincolare
attrito

Nel moto un corpo segue una o un'altra traiettoria nel moto come conseguenza di interazioni

PARTICELLA LIBERA = non soggetta a interazioni
- sufficientemente lontana da altri corpi ⟹ SISTEMA ISOLATO
- mutue interazioni trascurabili

oppure

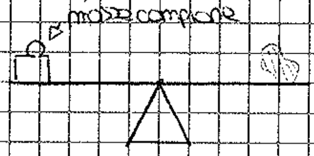
- interazioni si annullano a vicenda
  ↳ interazione RISULTANTE nulla ⟹ EQUILIBRIO

1° PRINCIPIO DELLA DINAMICA: ogni corpo persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme a meno che non intervenga una forza esterna a modificare tale stato ⟹ PRINCIPIO D'INERZIA

↳ è valido solo per i SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI (cioè in quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto al sistema di riferimento delle stelle fisse)

MASSA: la massa è un coefficiente, caratteristico di ogni particella, che ne determina il comportamento nella interazione con altre particelle (= in presenza di una forza)

definizione operativa

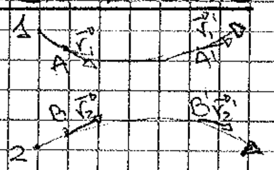


si basa sull'attrazione gravitazionale
→ MASSA GRAVITAZIONALE

m ~ S.I. kg

la massa è una PROPRIETÀ INTRINSECA dei corpi

SISTEMA ISOLATO



t: particella 1 in A $\vec{v}_1$
particella 2 in B $\vec{v}_2$

$t'>t$: particella 1 in A', $\vec{v}_1'$
" 2 in B', $\vec{v}_2'$

in $\Delta t = t'-t$ l'interazione ha causato una variazione in v per le 2 particelle

$\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_1' - \vec{v}_1$

$\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_2' - \vec{v}_2$

$\Delta\vec{v}_1 \uparrow \quad \downarrow \Delta\vec{v}_2$
⇓
hanno direzioni opposte

$\forall \Delta t \quad \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = K$ costante
⇓
$\Delta\vec{v}_1 = -K\,\Delta\vec{v}_2$

K: proprietà intrinseca della coppia di particelle

massa inerziale: $\Delta\vec{v}_0 = -m_1\,\Delta\vec{v}_1$

$\Delta\vec{v}_0 = -m_2\,\Delta\vec{v}_2 \qquad K_1 F = m_1$

$$\boxed{m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2}$$

$\Rightarrow \frac{\Delta v_2}{\Delta v_1} = \frac{m_1}{m_2}$ ⟹ perciò se $m_1 \gg m_2$ $\quad \Delta v_1 \ll \Delta v_2$

Più grande è m, maggiore è l'inerzia del corpo a cambiare la sua velocità

$$\boxed{M_{INERZIALE} = M_{GRAVITAZIONALE}}$$

QUANTITÀ DI MOTO $\vec{p}$

$$\boxed{\vec{p} \stackrel{def}{=} m \cdot \vec{v}} \qquad [p] = m[v] = m\,\ell\,t^{-1}$$

SI : kg m/s

PRINCIPIO D'INERZIA $\Rightarrow$ $\vec{p}$ = costante per una particella libera

$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_n$ per un sistema isolato

$\vec{p}$ unisce il concetto di $\vec{v}$ e di inerzia a cambiare $\vec{v}$

- $m_1 \Delta\vec{v}_1 = -m_2 \Delta\vec{v}_2$

$m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_2'$

$\vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2' \Rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$

Per un sistema isolato l'interazione produce scambio di quantità di moto tra le particelle coinvolte

$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ $\qquad \Delta\vec{p}$ = IMPULSO

LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO: la quantità di moto totale di un sistema isolato rimane costante nel tempo

La conservazione di $\vec{p}$ è stata verificata in tutti i processi fisici senza eccezioni

FORZA

$$\boxed{\vec{F} \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{se } \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

$$[F] = [p]\,t^{-1} = m\,\ell\,t^{-2}$$

SI $1\,N = 1\,kg\,m/s^2$

SISTEMA ISOLATO

in Δt: $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$ $\rightarrow$ $\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(-\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}\right)$

$\vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ $\quad$ ↳ $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

3° PRINCIPIO DELLA DINAMICA: quando due particelle interagiscono in un sistema isolato, la forza agente su una particella è uguale e opposta alla forza agente sull'altra

↳ PRINCIPIO DI AZIONE-REAZIONE: ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria

Due o più forze sono in equilibrio quando la forza risultante $0 = \vec{F} = \sum \vec{F}_i$ sullo stesso corpo è zero.

In questo caso $\vec{p}$ = costante $\Rightarrow$ particella in quiete o in moto rettilineo uniforme

FORZE INTERNE: forze che agiscono in un sistema isolato

$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{P}$ costante $\qquad \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\vec{P} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = 0$

La somma vettoriale delle forze interne agenti in un sistema isolato è zero

SISTEMA NON ISOLATO

Su una particella i-esima (m_i, $\vec{P}_i$) agisce una forza interna totale $\vec{F}_i^{int}$ ma agisce anche una forza esterna totale $\vec{F}_i^{est}$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_i \left(\vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{est}\right) \Rightarrow \sum \vec{F}_i^{int} = 0$$

$$= \sum_i \vec{F}_i^{est} = \vec{F}^{est} \neq 0$$

• $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

COME SI MISURA LA FORZA

- $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ misura dinamica
- procedura statica: DINAMOMETRO
  - massa trascurabile della molla rispetto agli oggetti da pesare
  - la molla deve essere elastica, cioè deve ritornare alla forma originaria dopo essere stata allungata.

$$\boxed{\vec{F}_{el} = -k\Delta\vec{l}}$$

LEGGE DI HOOKE

all'equilibrio $\vec{F}_{el} + \vec{F}_g = 0 \Rightarrow mg - k\Delta l = 0$

• $m\vec{g} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
$$\begin{cases} d^2x/dt^2 = 0 \\ d^2y/dt^2 = 0 \\ d^2z/dt^2 = g \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}(t-t_0) \\ y(t) = y_0 + v_{0y}(t-t_0) \\ z(t) = z_0 + v_{0z}(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \end{cases}$$

• 

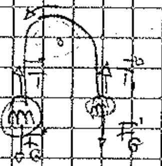
$m = 8\ kg$
$\alpha = 20°$

- moto rettilineo costante

$F = mg \cdot \sin 20° = 26.8\ N$

- moto accelerato $a = 0.2\ m/s^2$

$F = mg \cdot \sin 20° + m \cdot a = 28.4\ N$

• 

$T = T_1$

$$m \quad \vec{F}_g + \vec{T} = m\cdot\vec{a} \qquad \begin{cases} mg - T = ma \\ m'g - T = -m'a \end{cases}$$
$$m' \quad \vec{F}_g' + \vec{T}' = -m'\vec{a}$$

• $(m+m')a = (m-m')g \rightarrow a = \frac{m-m'}{m+m'}g$

• $2T = (m+m')g - (m-m')a =$

$$= (m+m')g - \frac{(m-m')^2}{(m+m')}g = \frac{g}{m+m'}\left[(m+m')^2 - (m-m')^2\right] =$$

$= \frac{g}{m+m'}\left[(m+m'+m-m')(m+m'-m+m')\right] = \frac{4mm'}{m+m'}g$

$T = \frac{2mm'}{m+m'}$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a}$ se m costante

$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad \rightarrow \vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$

FORZA D'ATTRITO RADENTE

$\boxed{\vec{F}_{AR} = -\vec{u}_v |\vec{F}_{AR}|}$

Non dipende dalla superficie di contatto
dalla velocità

$\boxed{|\vec{F}_{ar}| = \mu N}$

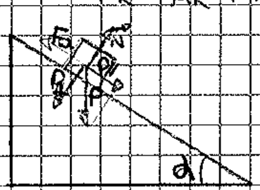
μ coefficiente di attrito radente $\quad [\mu] = 0$

μ_s coefficiente di attrito statico $\rightarrow$ per farlo muovere da fermo

μ_k coefficiente di attrito dinamico $\rightarrow$ quando il corpo è in moto

$F_s = \mu_s \cdot N$

$F_k = \mu_k \cdot N \qquad F_k < F_s$



μ_s Qual'è α perché il corpo si muova?

$P_\perp = mg\cos\alpha \qquad P_{//} = mg\sin\alpha$

$P_{//} < F_s \qquad mg\sin\alpha < \mu_s\, mg\cos\alpha$

non c'è moto finché $\mu_s > tg\alpha$

se $tg\alpha > \mu_s$ il corpo si muove di moto accelerato

FORZA ATTRITO VISCOSO nei fluidi

Quando un corpo si muove in un fluido, il fluido esercita intorno al corpo una forza

$\boxed{\vec{F}_{ar} = -k\eta\vec{v}}$

$[k] = \ell$ dipende dalla forma del corpo
per un corpo sferico $k = 6\pi R$

$[\eta] = [F]/[k][v] = \frac{m\ell t^{-2}}{\ell\,\ell t^{-1}} = m\ell^{-1}t^{-1}$ coefficiente di attrito viscoso

$N s/m^2$

Un corpo di massa m si muove attraverso un fluido sotto l'azione della forza $\vec{F}$

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{ar} = \vec{F} - k\eta\vec{v}$

$v_0 = 0 \quad F$ costante $\quad t_0 = 0 \;\; v_0 = 0 \rightarrow F_{ar} = 0$

$\downarrow F$

$v > 0 \rightarrow F_{ar} \neq 0$

man mano che aumenta $\vec{v}$ (accelera sotto l'azione di $\vec{F}$) aumenta anche F_{ar}
$\hookrightarrow$ si arriva ad un valore limite di v per cui il corpo non accelera più se F è costante $\rightarrow a = 0$

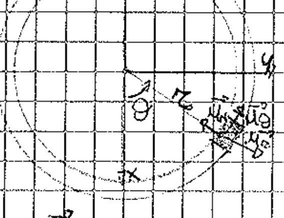
$\vec{v} = \frac{\vec{F}}{k\eta} \qquad \vec{F} - k\eta\vec{v} = m\vec{a} = 0$

corpo in caduta libera in un fluido

- $\vec{F} = m\vec{g} \quad m = \rho V \quad m_f = \rho_f V \quad \vec{F} = (m - m_f)\vec{g}$

FORZA CENTRIPETA / CENTRIFUGA

Un treno si muove su una rotaia circolare di moto circolare uniforme



$$\vec{a}_{cp} = \omega^2 r \, \vec{u}_N = -\omega^2 r \, \vec{u}_r$$

$$\vec{F}_{cp} = m \cdot \vec{a}_{cp} = -m\omega^2 r \, \vec{u}_r$$

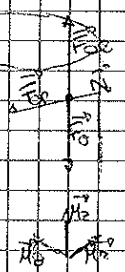
$|\vec{F}_{cp}| =$ costante $\qquad \vec{u}_r = \cos\theta \, \vec{u}_x + \sin\theta \, \vec{u}_y$

$\theta(t) = \omega(t - t_0)$

Punto di vista della rotaia ($\rightarrow$ 3° legge di Newton):
il treno esercita sulla rotaia una FORZA CENTRIFUGA

$$\vec{F}_{CF} = m\omega^2 r \, \vec{u}_r$$

ROTORE



Il rotore si mette in moto circolare, aumentando $v = \omega R$ finché il pavimento si apre ma la persona non cade

$\vec{F}_G = mg(-\vec{u}_z)$

$\vec{F}_{as} = \mu_s N \vec{u}_z$

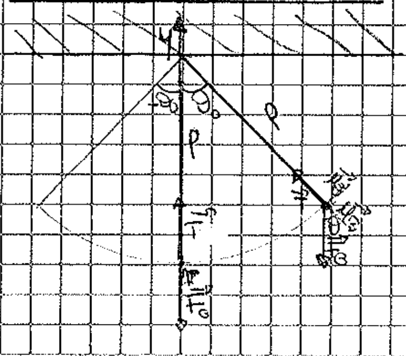
$\vec{F}_{cf} = \vec{N} = m\omega^2 r \, \vec{u}_r$

$\vec{u}_z: \; -mg + \mu_s N = 0 \rightarrow \mu_s m\omega^2 R = mg \qquad \mu_s = \dfrac{g}{\omega^2 R}$

$\vec{F} = m\vec{a} = 0$

$N = m\omega^2 R \qquad \omega = \sqrt{\dfrac{g}{\mu_s R}}$

PENDOLO SEMPLICE



Con una massa puntiforme m appesa ad un estremo di un filo ideale di lunghezza ℓ. L'altro estremo è appeso al soffitto

Spostato un dalla verticale, senza piegare il filo, finché il filo forma un angolo θ_0 con la verticale

$\vec{r}(t) = \ell\,\theta(t)\,\vec{u}_\theta$

$\vec{F}_G = mg\cos\theta \, \vec{u}_r \; mg\sin\theta \, \vec{u}_\theta$

$\vec{T} = -T\vec{u}_r$

$\vec{F}_G + \vec{T} = m\vec{a} \qquad \vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta \qquad a_r = -a_N = -\omega^2 \ell$

$a_\theta = \ell \dfrac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

$$\begin{cases} \vec{u}_r: \; mg\cos\theta - T = m(-\omega^2 \ell) \\ \vec{u}_\theta: \; -mg\sin\theta = \ell \dfrac{d^2\theta}{dt^2} m \end{cases} \qquad \begin{cases} T = \underbrace{mg\cos\theta}_{\text{reaz. vincolare}} + \underbrace{m\omega^2 \ell}_{\text{acc. centripeta}} \\ \boxed{\cancel{m}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta \, \cancel{m}} \end{cases}$$

$\rightarrow$ non ho soluzioni analitiche in generale. Però per piccole oscillazioni
θ_0 piccolo $\quad \sin\theta_0 \sim \theta$
$-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta}$$

$\omega_0^2 = \dfrac{g}{\ell} \qquad \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \rightarrow \theta(t) = A\sin[\omega_0 t] + B\cos[\omega_0 t]$

$$\frac{d\theta}{dt} = A\omega_0 \cos[\omega_0 t] - B\omega \sin[\omega_0 t]$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin[\omega_0 t] - B\omega_0^2 \cos[\omega_0 t] =$$

$$= -\omega_0^2\,\theta(t)$$

condizioni al contorno:

$t=0$ $\theta = \theta_0$ $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} = 0$

$\theta(0)=\theta_0 = B$ $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_0 = 0 = A\omega_0$ $\begin{cases} B=\theta_0 \\ A=0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos[\omega_0 t]$$

$\vec{\mu}_r$ $\begin{cases} m a_r = mg\cos\theta - T = -ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ m a_\theta = -mg\sin\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$ $\vec{\mu}_\theta$

$T = mg\cos\theta + ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\sin\theta = 0 \rightarrow l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0$

$\theta(t)$

$f\left(\theta(t), \frac{d\theta}{dt}, \frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = 0$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/l}}$

$\theta(t)$ descrive le piccole oscillazioni del pendolo intorno alla posizione di equilibrio

$\omega_0 = \sqrt{g/l}$ $[\omega_0] = t^{-1}$

Qual è il periodo dell'oscillazione?

$T/2$: tempo necessario per andare da θ_0 a $-\theta_0$

$\theta(T/2) = -\theta_0 = \theta_0 \cos[\omega_0 T/2] \Rightarrow \cos[\omega_0 T/2] = -1$

$\theta_0 = \theta(0)$ $\omega_0 T/2 = \pi$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

ω_0 è la frequenza dell'oscillazione intorno alla posizione di equilibrio

MOMENTO DI UNA FORZA   FORZE CENTRALI

Supponiamo che il corpo possa ruotare intorno ad O.

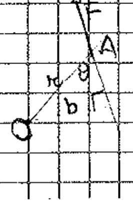
Vogliamo introdurre una grandezza fisica che misura l'efficacia di $\vec{F}$ nel far ruotare A intorno ad O

Dipende dalla distanza tra O e la retta su cui giace $\vec{F}$ → braccio della forza

$\boxed{\tau = b \cdot F = rF\sin\theta}$ con $b = r\sin\theta$, $r = OA$

Introduciamo il vettore momento della forza: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ $[\tau] = [r][F] = m l^2 t^{-2}$

$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y \\ \vec{F} = F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y \end{cases}$ $\vec{\tau} = (xF_y - yF_x)\vec{u}_z$



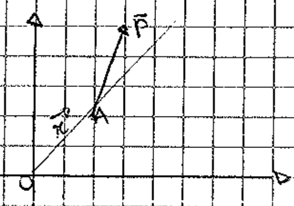
Per una particella in A:

si può definire il momento della forza $\vec{F}$ in A rispetto ad O

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{r} = \vec{OA}$$

MOMENTO ANGOLARE

Momento di un vettore $\vec{K}$ applicato in A rispetto ad O: $\vec{r} \times \vec{K}$



$m, \vec{v}$ → $\vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{L}$ rispetto ad O di particella in A:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$L = mrv\sin\theta$$

MOTO CIRCOLARE INTORNO AD O

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad L = mr\omega r = mr^2\omega$$

$$v = \omega r$$

MOTO CURVO

$$\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta \qquad \vec{r} = r\vec{u}_r$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\vec{u}_r \times (v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta) = mrv_\theta$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_r = 0$$
$$\vec{u}_r \times \vec{u}_\theta = \vec{u}_z$$

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \Rightarrow L = mr^2\omega$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} =$$

$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{v} \times \vec{v}| = vv\sin\theta = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

FORZE CENTRALI

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \rightsquigarrow \vec{p} = \text{costante}$$

$$\vec{\tau} = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \rightsquigarrow \vec{L} = \text{costante}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

① $\vec{F} = 0 \rightsquigarrow \vec{p}$ costante $\rightsquigarrow$ particella è libera

$$L = rp\sin\theta = \underbrace{(r\sin\theta)}_{b}p = \text{costante}$$

② $\vec{r} = 0 \rightsquigarrow L = 0$

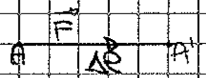
③ $\vec{r} \parallel \vec{F} \rightsquigarrow \vec{\tau} = 0 \rightsquigarrow \vec{L}$ costante

Se $\vec{L} \neq 0$ costante $\Rightarrow$ sistema è descritto da una FORZA CENTRALE

LAVORO ED ENERGIA

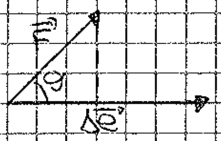
Lavoro fatto da una forza costante

$\vec{F} = F\vec{u}_x$



Def: Lavoro fatto da $\vec{F}$ costante per spostare da A ad A' la particella, la quantità

$\underline{W = F\cdot\Delta\ell}$ LAVORO



$W = F\cdot\Delta\ell\cdot\cos\theta = (F\cdot\cos\theta)\cdot\Delta\ell = \vec{F}\cdot\Delta\vec{\ell} = \Delta\vec{\ell}\cdot\vec{F}$ PRODOTTO SCALARE

$\boxed{W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{\ell}}$ W è uno scalare

$\vec{F}_{centripeta}$ compie lavoro nullo nello spostamento su una circonferenza

$W<0$

il lavoro compiuto dalla gravità su un corpo che sale dentro un ascensore è <0

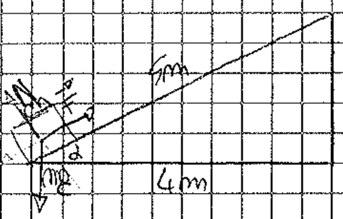
Le forze di attrito compiono sempre $W<0$ perché hanno direzione opposta al moto

Se su un corpo agiscono più forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ⇒ il moto è dovuto a $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{\ell} = \sum_i \vec{F}_i\cdot\Delta\vec{\ell} = \sum_i(\vec{F}_i\cdot\Delta\vec{\ell}) = \sum_i W_i$$

$[W] = [F]\ell = m\ell^2t^{-2}$ $\qquad 1J = 1N\cdot 1m$

Joule



$m = 10kg$

no attriti

$N = mg\cos\alpha$

$F - mg\sin\alpha = 0 \qquad F = mg\sin\alpha$

$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{\ell} = mg\sin\alpha\cdot 5m\cdot\overbrace{\cos 0°}^{1}$

Se volessi issare m verticalmente: $F' = mg$

$W' = mg(\Delta\ell\sin\alpha) = W$

- $\mu_k \neq 0 \qquad F_{ar} = \mu_k N$

$\vec{u}_x: \; \tilde{F} - mg\sin\alpha - \mu_k N = 0 \qquad \tilde{F} = mg(\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha)$

$\vec{u}_y: \; N - mg\cos\alpha = 0 \qquad N = mg\cos\alpha$

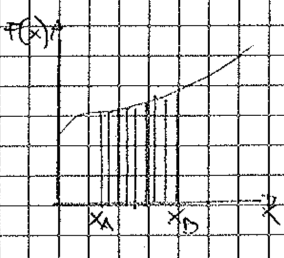
$W = \tilde{F}\Delta\ell = mg\sin\alpha\,\Delta\ell + \mu_k\, mg\cos\alpha\,\Delta\ell$

- $\vec{F}$ costante $\quad W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{\ell} = |\vec{F}||\Delta\vec{\ell}|\cos\theta$

$\vec{F} = F(x)\vec{u}_x$

$\Delta\vec{\ell} = \Delta\ell\,\vec{u}_x$

$\Delta\ell = x_B - x_A$



$i = 1, n \qquad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

$x_A \equiv x_1$

$x_B \equiv x_{n+1}$

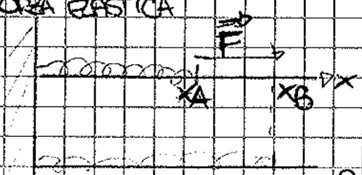
Δx_i piccolo / $F(x)$, per $x \in \Delta x$ ~ costante F_i

$$\Delta W_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{x} = F_1 \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \Delta W_1 = \delta W_1 = F_1 dx_1$$

$$W_{A \to B} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to +\infty}} \sum_{i=1}^{n-1} \delta W_i = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\, dx$$

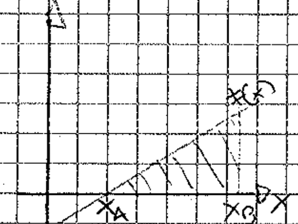
FORZA ELASTICA

- 

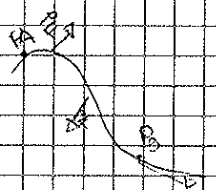
$$\vec{F}_e = -k(x - x_A)\vec{u}_x$$
$$\vec{F} = -\vec{F}_e$$

Calcolo il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F} = -\vec{F}_e$ per allungare la molla

$$W_{A \to B} = \int_{x_A}^{x_B} k(x - x_A)\, dx = \left[\frac{1}{2}k(x - x_A)^2\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2}k(x_B - x_A)^2$$



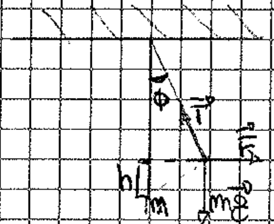
$$\underset{\text{area}}{S} = \frac{1}{2}\underbrace{(x_B - x_A)}_{\text{base}}\underbrace{k(x_B - x_A)}_{\text{altezza}} = W_{A \to B}$$

- 

$\Delta \vec{P}$ lungo curva tra P_A e P_B
$\vec{F}(\vec{r})$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}||d\vec{s}|\cos\theta$$

$d\vec{s} = \vec{v}\, dt$ è sempre tangente alla traiettoria $\forall$ punto

- 

PENDOLO

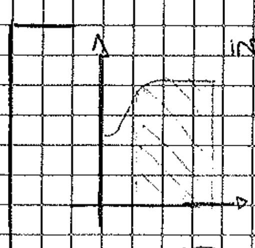
Per spostare m dalla posizione di equilibrio $\phi = 0$ a $\phi = \phi_0$ applico forza $\vec{F} = F\vec{u}_x$. Supponiamo F sia minimo possibile per permettere lo spostamento con $\vec{a} = 0$

$$\begin{cases} x: & F - T\sin\phi = 0 \\ y: & T\cos\phi - mg = 0 \end{cases} \qquad F = T\sin\phi = mg\tan\phi \qquad T = \frac{mg}{\cos\phi}$$

$$d\vec{s} = \ell\, d\phi\, \vec{u}_\phi = \ell\, d\phi(\cos\phi\, \vec{u}_x + \sin\phi\, \vec{u}_y)$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}||d\vec{s}|\cos\phi = mg\frac{\sin\phi}{\cancel{\cos\phi}}\ell\, d\phi \cancel{\cos\phi} =$$
$$= mg\ell \sin\phi\, d\phi$$

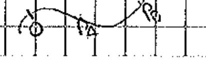
$$W_{0 \to \phi_0} = \int_0^{\phi_0} \delta W(\phi) = \int_0^{\phi_0} mg\ell\sin\phi\, d\phi = mg\ell\int_0^{\phi_0}\sin\phi\, d\phi = mg\ell\left[-\cos\phi\right]_0^{\phi_0} =$$
$$= mg\underbrace{\ell(1 - \cos\phi_0)}_{h} = mgh$$



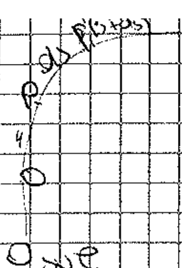
INTEGRALE CURVILINEO

In generale il lavoro può dipendere dal cammino percorso per andare da P_A a P_B:

$$W_\ell(P_A \to P_B) = \int_{\ell(P_A \to P_B)} \vec{F}\, d\vec{\ell}$$



Per risolverlo è necessario conoscere ℓ che definisce il cammino orientato $\ell(P_A \to P_B)$, e conoscere $\vec{F}(x, y, z)$



Ogni $P \in \ell$ è parametrizzato dalla lunghezza s della curva $\overset{\frown}{OP}$

$s>0$ se $P(s)$ è successivo a O in direzione percorrenza

F_x, F_y sono funzioni di x, y

$P \in \ell \quad P(s) = (x(s), y(s))$

$$\text{su } \ell : \begin{cases} dx = x(s+ds) - x(s) = \frac{dx}{ds} ds \\ dy = y(s+ds) - y(s) = \frac{dy}{ds} ds \end{cases}$$

$F_x(x(s), y(s))$

$F_y(x(s), y(s))$

$$W = \int_{\ell(P_A \to P_B)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\ell(P_A \to P_B)} \left[F_x(s) \frac{dx}{ds} ds + F_y(s) \frac{dy}{ds} ds \right] = \int_{S_A}^{S_B} \left[F_x(s) \frac{dx}{ds} + F_y(s) \frac{dy}{ds} \right] ds$$

Pendolo

Qual'è il lavoro compiuto da $\vec{F}$ nello spostamento da $P(\phi = 0)$ a $P(\phi = \phi_0)$ di m?

$d\vec{\ell} = \ell d\phi \, \vec{u}_\phi \qquad \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$

$\vec{F} = \frac{mg}{\cos\phi} \vec{u}_N \qquad$ per spostamento su circonferenza $d\vec{\ell} \parallel \vec{u}_\phi$ tg a P

$\vec{u}_\phi \perp \vec{u}_N$ su circonferenza

$\vec{F} = F \vec{u}_\phi \quad$ minimo / m si muove con $\vec{a} = 0$

$= T(\cos\phi \vec{u}_? - \sin\phi \vec{u}_?)$

$x: \; F\cos\phi - T\sin\phi = 0 \qquad T = \frac{mg - F\sin\phi}{\cos\phi}$

$y: \; T\cos\phi - mg + F\sin\phi = 0 \qquad F = mg\sin\phi$

$$W = \int_0^{\phi_0} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Potenza

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}} \quad \text{rapidità con cui è compiuto un lavoro}$$

$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \qquad P = \vec{F} \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$W = \int_{\ell(P_1 \to P_2)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad$ in generale $\vec{F} = \vec{F}(t)$, $d\vec{\ell} = d\vec{\ell}(t) \Rightarrow W(t)$
$= \vec{v} dt$

$$= \int_{\ell(P_1 P_2)} [\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} [\vec{F}(t) \vec{v}(t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt} dt$$

Potenza media in $\Delta t \qquad P_{medio} = \frac{W_{t}}{\Delta t} \qquad [P] = [W] t^{-1} = m\ell^2 t^{-2} t^{-1} = m\ell^2 t^{-3}$

S.I. Watt $\quad 1W = \frac{J}{s}$

1kWh lavoro compiuto in 1 ora da macchine di potenza 1kW

esempio 8.1 $\qquad F = F \vec{u}_x \quad F(t) = 6t$ N agisce su $m = 2$kg

$t_0 = 0 \quad v(0) = 0 \qquad W_{0 \to x_1} = \int_\ell \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{x_0}^{x_1} F dx = \int_{t=0}^{t=2s} F(t) v(t) dt$

$dx = v dt$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{dv}{dt} = \frac{6t}{2} \; m/s^2$$

$$v(t) - v_0 = \int_{t=0}^{t} a(t)\,dt = \int_0^t 3t\,dt \rightarrow v(t) = \frac{3}{2}t^2 \; m/s$$

$$W_{[t=0 \rightarrow t=2]} = \int_{t=0}^{t=2} [F \cdot v]\,dt = \int_0^{t=2} 6t \, \frac{3}{2}t^2\,dt = \int_0^2 9t^3\,dt = \left[\frac{9}{4}t^4\right]_0^2 \; J = 36$$

ENERGIA CINETICA

$\vec{F}$ agisce su particella di massa m

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = ds\,\vec{u}_T = v\,dt\,\vec{u}_T$$

$$= F_T\,ds$$

$$= m\frac{dv}{dt}v\,dt \qquad ds = v\,dt$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m a_T \vec{u}_T + m a_N \vec{u}_N$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad \begin{cases} \vec{u}_T \cdot \vec{u}_T = 1 \\ \vec{u}_T \cdot \vec{u}_N = 0 \end{cases}$$

$$v\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}v^2\right]$$

$$\delta W = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}[v^2]\,dt = \frac{1}{2}m\,d[v^2] \qquad dW = F_T\,s = m\frac{dv}{dt}ds = m\,dv\frac{ds}{dt} = mv\,dv$$

$$W_{(P_1 \rightarrow P_2)} = \int_{(P_1 \rightarrow P_2)} \delta W = \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{2}m\,d[v^2] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \boxed{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2} \qquad W = \int_A^B F\,ds = \int mv\,dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = E_K \qquad W_{(P_1 \rightarrow P_2)} = E_{K_2} - E_{K_1}}$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (DELLE FORZE VIVE)

$$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow E_K = \frac{p^2}{2m} \quad \text{con } p^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} = |\vec{p}|^2$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME: $a_T = 0 \quad \vec{a} = a_N \vec{u}_N$

$v = \text{cost}$

$E_K = \frac{1}{2}mv^2$ costante

per avere il moto circolare uniforme sul sistema agisce una forza centripeta $\vec{F} = F\vec{u}_N = m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N$

$\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow W = 0 \rightarrow$ l'energia cinetica non var.

- $\vec{F}(t) = 6t\,\vec{u}_x \; N \qquad m = 2\,kg$

$$v(t) = \frac{3}{2}t^2 \; m/s$$

$$E_K(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}(2\,kg)\left[\frac{3}{2}t^2 \, m/s\right]_0^2 = \frac{9}{4}t^4 \; J$$

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = E_K(t_2) - E_K(t_1) = \frac{9}{4}t_2^4 - \frac{9}{4}t_1^4$$

Lavoro compiuto dalla forza elastica $\quad \vec{F}_e = -k(x - x_A)\vec{u}_x$

$$W_{x_B \rightarrow x} = \int_{x_B}^{x} F_e\,dx = \int_{x_B}^{x} -k(x - x_A)\,dx = -\frac{1}{2}k\left[(x - x_A)^2\right]_{x_B}^{x} =$$

$$= \frac{k}{2}(x_B - x_A)^2 - \frac{k}{2}(x - x_A)^2$$

osserviamo $v(x_B) = 0$

$$W_{x_B \rightarrow x} = E_{K,x} - \underbrace{E_{K,x_B}}_{=0 \; x_B \\ v_B = 0} = E_{K,x} = \frac{1}{2}mv^2(x)$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left[(x_B - x_A)^2 - (x - x_A)^2\right]}$$

la velocità $(x-x_A) = \pm(x_B - x_A) \rightarrow x = x_B = x_A + \Delta x$
si ottiene

$\Delta x = x_B - x_A$

$\searrow x = 2x_A - x_B = x_A - \Delta x$

$v(x_B) = 0$

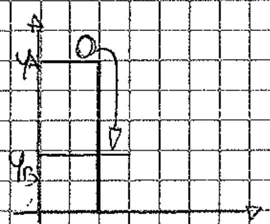
$v(x_A)$ vel max

LAVORO FATTO DA $\vec{F}$ COSTANTE

$$W = \int_{\ell(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \vec{F}\cdot \int_{\ell(A\to B)} d\vec{\ell} = \vec{F}\cdot(\vec{\ell}_B - \vec{\ell}_A)$$

$d\vec{\ell} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y$

$$\vec{F} = -mg\,\vec{u}_y \Rightarrow W = \int_{\ell(A\to B)} (-mg)\,\vec{u}_y\cdot d\vec{\ell} = -mg\int_{y_A}^{y_B} dy = mg\,y_A - mg\,y_B$$



$$W = mg\,y_A - mg\,y_B = E_{kB} - \underbrace{E_{kA}}_{=0} = \frac{1}{2}m\,v_B^2$$

$$mg(y_A - y_B) = \frac{1}{2}m v_B^2$$

FORZE CONSERVATIVE

Una FORZA si dice CONSERVATIVA quando possiamo associarle una quantità $E_p(x)$ **energia potenziale**, funzione solo delle coordinate $\vec{r} = (x,y,z)$ della particella in modo tale che il lavoro fatto dalla forza per spostare la particella: $W_{\ell(A\to B)} = \int_{\ell(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B)$

forza peso: $W_{A\to B} = mg\,y_A - mg\,y_B \Rightarrow E_p(y) = mgy$

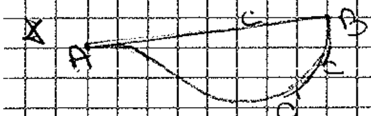
forza elastica: $W_{A\to B} = \frac{k}{2}(x_A - x_{eq})^2 - \frac{k}{2}(x_B - x_{eq})^2 \Rightarrow E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$

forze costanti: $W_{A\to B} = \vec{F}\cdot\vec{r}_B - \vec{F}\cdot\vec{r}_A \Rightarrow E_p(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot\vec{r}$

E_p è sempre definita a meno di una costante arbitraria

$\underline{E_p = mgy + C}$ → posso scegliere C | $E_p(y=0) \Rightarrow C = 0$

$W_{A\to B} = mg\,y_A + C - mg\,y_B - C$



PER LE FORZE CONSERVATIVE

$W_{C(A\to B)} = W_{C'(A\to B)}$ non dipende dal cammino ma solo dagli estremi del percorso

$C(A\to B)$

$$W_{C(A\to B)} = \int_{\ell(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \qquad W_{C(B\to A)} = \int_{\ell(B\to A)} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_{\ell(A\to B)} \vec{F}\cdot(-d\vec{\ell}) = -W_{C(A\to B)}$$

$C(A\to B) + C'(B\to A)$ se F conservativa $W_{C+C'} = W_{C(A\to B)} - W_{C'(A\to B)}$

$\rightarrow = W_{A\to B} - W_{A\to B} = 0$

$$\boxed{\oint_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = 0}$$

cammino chiuso

CIRCUITAZIONE

PROPRIETÀ forze conservative:

a) $\exists\, E_p(\vec{r}) \,/\, W_{C(A\to B)} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) \Rightarrow \delta W = -dE_p$ *

b) $W_{C(A\to B)} = W_{A\to B} \quad \forall C$ dipende solo dalla posizione iniziale e finale

c) $W_\gamma = \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$

$$* \quad E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_A} dE_p(\vec{r})$$

- caso unidimensionale

$$W_{A\to B} = E_p(x_A) - E_p(x_B) = \int_{x_B}^{x_A} dE_p(x) = -\int_{x_A}^{x_B} dE_p(x) = \int_{x_A}^{x_B} \delta W$$

$$\Rightarrow \delta W = \vec{F}\cdot d\vec{l} = -dE_p = F(x)\,dx$$

$$\vec{F} = F(x)\,\vec{u}_x \qquad d\vec{l} = dx\,\vec{u}_x \qquad dE_p(x) = \frac{dE_p}{dx}\,dx$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{dE_p}{dx} \qquad \vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\,\vec{u}_x}$$

d) $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$ $\longrightarrow \vec{u}_x$

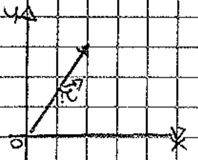
caso una dimensione: $\vec{F} = F(x)\,\vec{u}_x \rightarrow \exists\, E_p(x) = -\int F(x')\,dx' + c$

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx} \qquad \vec{F}(x) = -\frac{dE_p}{dx}\,\vec{u}_x$$

caso forza peso: $E_p(y) = mgy \qquad \vec{F} = -\frac{dE_p}{dy}\,\vec{u}_y = -mg\,\vec{u}_y$

• $E_p(\vec{r})$

$\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y$



$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{l} = -dE_p \qquad E_p(x,y)$$

$$\vec{r} + d\vec{l} \qquad dE_p = E_p(\vec{r} + d\vec{l}) - E_p(\vec{r}) =$$
$$= E_p(x+dx,\, y+dy) - E_p(x,y)$$

DERIVATA PARZIALE

$\frac{\partial E_p}{\partial x}$, $\frac{\partial E_p}{\partial y}$

① E_p dipende da più di una variabile

② nel fare la derivata rispetto ad una variabile tratto tutte le altre variabili come costanti

$$\left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{y=\text{cost}} \qquad V(x,y): \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{V(x+\Delta x, y) - V(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{V(x, y+\Delta y) - V(x,y)}{\Delta y}$$

$$V(x,y) = x^2 y + y^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2xy \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = x^2 + 2y$$

$$dE_p = E_p(x+dx, y+dy) - E_p(x,y)$$

$$\left[dE(x) = E(x+dx) - \underset{\uparrow \text{taylor}}{E(x)} = E(x) + \frac{dE(x)}{dx}dx + o(dx^2) - E(x) = \frac{dE}{dx}dx \right]$$

$$E_p(x+dx, y+dy) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{taylor} \\ \text{intorno a } dy=0}}{=} E_p(x+dx, y) + \frac{\partial E_p}{\partial y}(x,y)\,dy =$$

$$= E_p(x,y) + \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy$$

$$\boxed{dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy}$$ DIFFERENZIALE TOTALE

$$(dx, dy) = d\vec{e}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}, \frac{\partial E_p}{\partial y}\right) = \vec{\nabla} E_p}$$ OPERATORE GRADIENTE

$$\boxed{dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy = \vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{e}}$$

$$\boxed{\vec{F} \cdot d\vec{e} = -dE_p = -\vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{e}}$$

Relazione vale per $d\vec{e}$ generico

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p}$$

COORDINATE POLARI (r, θ)

$E_p(r, \theta)$

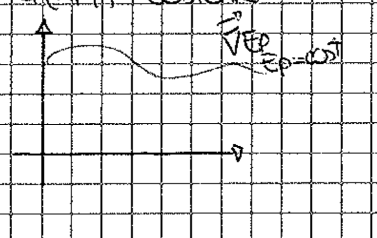
$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial r}dr + \frac{\partial E_p}{\partial \theta}d\theta \cdot r \cdot \frac{1}{r}$$

$$d\vec{e} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\nabla} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\nabla E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right)}$$

$E_p(x,y) =$ costante



$E_p(x,y,z) =$ costante

MOTO NEL PIANO SOTTO L'AZIONE DI FORZE CONSERVATIVE

$\vec{r} = r\vec{u}_r + r\theta\vec{u}_\theta$

$\vec{F}(r,\theta) = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta \qquad \exists E_p(r,\theta)$:

$F_r(r,\theta) = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$

$F_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$

FORZE CENTRALI

$\vec{F} = F\vec{u}_r \qquad F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} = F_r(r)$

consideriamo il caso in cui $E_p(r) \Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow F_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \vec{F} = F_r\vec{u}_r$

$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \iff \vec{F} = F\vec{u}_r$ centrale

$E_p = E_p(r) \qquad r = |\vec{r}|$

L'energia potenziale associata ad una forza centrale (conservativa) dipende solo dalla distanza $r = |\vec{r}|$ della particella dal centro della forza

x $\vec{F}(r) = F(r)\vec{u}_r$

$F(r) = kr$ · $k>0$ repulsivo

· $k<0$ attrattivo

$F(r) = kr = -\frac{\partial E_p}{\partial r} = -\frac{dE_p}{dr} \Rightarrow E_p = -\int kr\,dr = -\frac{1}{2}kr^2 + C$

es. $E_p(r_0) = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2}kr_0^2$

x $F(r) = \frac{k}{r^2} = -\frac{\partial E_p}{\partial r} = -\frac{dE_p}{dr} \Rightarrow E_p = -\int \frac{k}{r^2}dr = \frac{k}{r} + C$

per fissare C: $E_p(r \to +\infty) \to 0 \Rightarrow C = 0$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$W_e(A \to B) = E_{k,B} - E_{k,A}$ vale sempre per forze conservative e non conservative $\qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Per le FORZE CONSERVATIVE $W_e(A \to B) = E_{p,A} - E_{p,B}$

$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$

$E_{p,A} + E_{k,A} = E_{p,B} + E_{k,B} = E$ costante

La quantità $E = E_p + E_k$ si chiama ENERGIA MECCANICA TOTALE

x un corpo in caduta libera

$E_p = mgy$

$E_p(y=h) = mgh \qquad \frac{1}{2}mv^2 = mgh - mgy$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = cost = mgh \qquad v^2 = 2g(h-y)$

$E = E_p(h) = mgh \qquad v^2 - v_0^2 = 2g\Delta x$

MOTO RETTILINEO SOTTO L'AZIONE DI FORZE CONSERVATIVE

$E_p(x) \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x) = cost$

$v = \frac{dx}{dt}$: $E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x)$ equ. differenziale del 1° ordine

$$\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)} = \left(\frac{dx}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-E_p(x))}} = \pm dt$$

$t=0 : x(0)=x_0$

$$\int_0^t dt = \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(E-E_p(x))\frac{2}{m}}} = t \to t = t(x) \quad x = x(t)$$

moto possibile solo se $\boxed{E - E_p(x) \geq 0}$

esempio: $\vec{F} = cost$ $\vec{F} = F\vec{u}_x$ $F = -\frac{dE_p}{dx} \Rightarrow E_p = Fx + C$

$t=0$ $x(0)=0$ $v(0)=v_0$

$$\Rightarrow t = \pm\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+Fx)}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^x dx\left[E+Fx\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\to = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{F}\int_E^{E+Fx} dz\, z^{-\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{F}\,2\left[z^{\frac{1}{2}}\right]_E^{E+Fx}$$

$z = E + Fx$
$dz = F\,dx$

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{2}{F}\left\{(E+Fx)^{\frac{1}{2}} - E^{\frac{1}{2}}\right\}$$ invertiamo $x(t)$

$$\left[t \mp E^{\frac{1}{2}}\right]^2 = \left[\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{2}{F}\left(E+Fx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \pm \sqrt{\frac{2E}{m}}\,t$$

per forze conservative
$E = E_k + E_p(x) = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$
costante del moto

$F = ma \Rightarrow \frac{F}{m} = a$ $E = E_p + E_k$ calcolo in $t=0$

$= Fx(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) =$

$= 0 + \frac{1}{2}m v_0^2$

$E = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{m}} = v_0$

MOTO SOTTO L'AZIONE DI FORZE CONSERVATIVE CENTRALI

F centrale: $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ proprietà $L = mr^2\omega$ costante

$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v}$

F conservative: $\exists E_p$ $E = E_p + E_k$ costante

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) \\ L = mr^2\frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$ 2 quantità conservate

v^2 $\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta$ $v_r = \frac{dr}{dt}$ $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$

$$v^2 = |\vec{v}\cdot\vec{v}| = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + E_p(r)$$ $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$

$$E = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \frac{L^2}{m^2 r^4} \right] + E_p(r)$$

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

1 dimensione: $E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x)$

$x \in (-\infty, +\infty)$

$$E_{p\,efficace}(r) = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

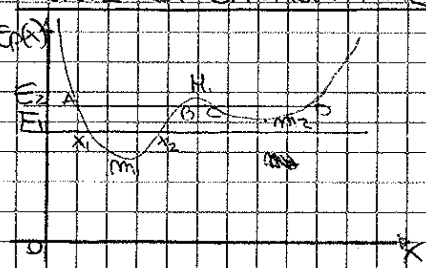
$r \in [0, +\infty)$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_{peff}(r)\right]} \qquad \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_{peff}(r)\right]}} = dt \rightarrow t(r) \rightarrow r(t)$$

$$E_{peff} = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \qquad \frac{L^2}{2mr^2} \text{ energia potenziale centrifuga}$$

$$\vec{F}_c = F_c \vec{u}_r \qquad F_c(r) = -\frac{\partial E_{pc}}{\partial r} = \frac{L^2}{mr^3} > 0$$

CURVE DI ENERGIA POTENZIALE



$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$ la forza è la pendenza della curva

$F(x) > 0$ se la curva decresce
$F(x) < 0$ se la curva cresce

m, M_1, m_2 sono punti di equilibrio $\rightarrow F = 0$
$\rightarrow m, m_2$ punti di equilibrio stabile
$\rightarrow M_1$ punto di equilibrio instabile

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_k = E - E_p(x) \geq 0$$

x_1 e x_2 sono punti di INVERSIONE $\rightarrow E_k = 0$ $\qquad$ BC = barriera di potenziale

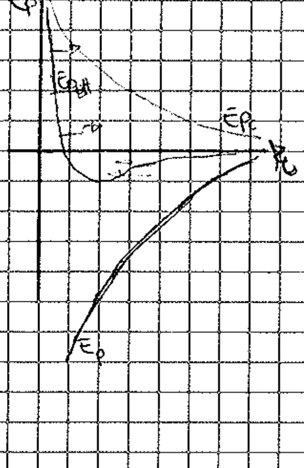
- per $E = E_1$ moto confinato in regione $x \in [x_A, x_B]$

$$v^2 = \frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)$$

- per $E = E_2$ $\quad x \in [x_A, x_B] \cup [x_C, x_D]$

$x \in (x_B, x_C)$ regione inaccessibile al moto

FORZE CENTRALI

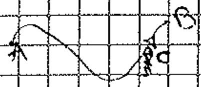


$$\left. \begin{array}{l} E_p(r) < 0 \\ E_{pc} = \frac{L^2}{2mr^2} \end{array} \right\} E_{peff} = \text{somma dei due contributi}$$

vedi libro $\qquad \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

Forze Conservative

$\vec{F}_c$, $\vec{F}_{NC}$

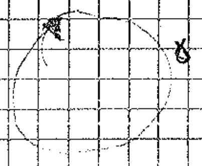


$W_{C(A\to B)} = W(\vec F_c) + W(\vec F_{NC}) =$

$= E_{p,A} - E_{p,B} + W' = E_{k,B} - E_{k,A}$

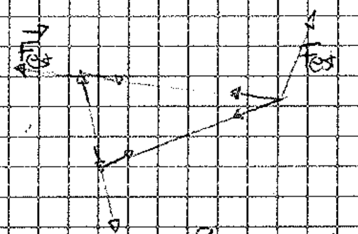
$W' = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) \leq 0$ per forze d'attrito

per forze d'attrito



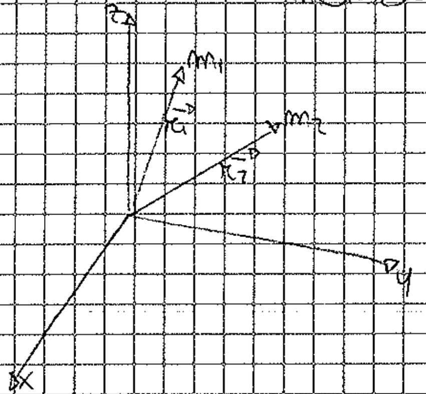
$\oint_\gamma \vec F \cdot d\vec\ell \neq 0$ per forze non conservative

Sistemi di particelle



L'evoluzione di sistemi di particelle si può sempre decomporre nei moti relativi delle particelle del sistema uno rispetto all'altro, e in un moto globale del sistema come tutt'uno

Il moto globale è associato al CENTRO di MASSA del sistema



Def. $\vec r_{CM} = \frac{m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1 + m_2}$

Per un sistema composto da n particelle:

$(m_1, \vec r_1), (m_2, \vec r_2) \ldots\ldots (m_n, \vec r_n)$

$$\vec r_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (m_i \vec r_i)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$M = m_1 + \ldots + m_n = \sum_i m_i$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + \ldots + m_n y_n}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + \ldots + m_n z_n}{M}$$

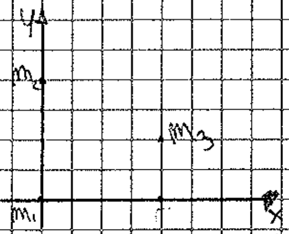
- 2 particelle $m_1 = 1kg$, $m_2 = 2kg$ $\quad M = m_1 + m_2 = 3kg$

$x_1 = 1m$
$x_2 = 3m$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} = \frac{1kg \cdot 1m + 2kg \cdot 3m}{3kg} = 2,33m$$

$$|x_1 - x_{CM}| = \left| \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 - (m_1 + m_2) x_1}{m_1 + m_2} \right| = \frac{m_2}{m_1 + m_2} |x_1 - x_2|$$

$|x_2 - x_{CM}| = \frac{m_1}{m_1 + m_2} |x_1 - x_2|$ $\Rightarrow$ x_{CM} è più vicino alla particella + pesante



$m_1 = 1,5kg$ $\quad \vec r_1 = (0,0)$
$m_2 = 1,5kg$ $\quad \vec r_2 = (0,2)$
$m_3 = 3kg$ $\quad \vec r_3 = (2,1)$

$M = m_1 + m_2 + m_3 = 6kg$

$$\vec r_{CM} = \frac{1}{M}\left[m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2 + m_3 \vec r_3\right] = \frac{1}{6}\left[1,5(0,0) + 1,5(0,2) + 3(2,1)\right] = \frac{1}{6}\left[(6,6)\right]$$

Confrontiamo le accelerazioni:

(I) A in quiete rispetto a O'

$\vec{a}' = 0$

$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

(II) A in moto rispetto O' con velocità $\vec{v}'$, $\vec{a}'$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{CORIOLIS}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{CENTRIPETA}}$$

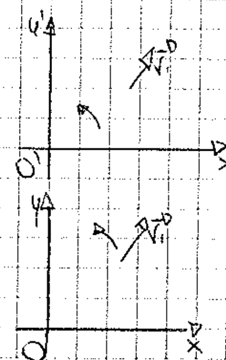
$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_O = \left[\frac{d\vec{v}_1}{dt}\right]_O + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}' = \left[\frac{d\vec{v}'}{dt}\right]_{O'} + \left[\frac{d\vec{r}'}{dt}\right]_O$$

$\vec{v}'$ cost:



$\vec{a}' = 0$

$$\left[\frac{d\vec{v}'}{dt}\right]_O = \vec{\omega} \times \vec{v}_1$$

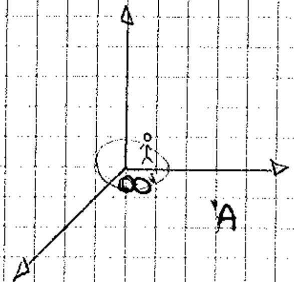
Nel caso generale $\vec{a}' \neq 0$

$$\left[\frac{d\vec{v}'}{dt}\right]_O = \left[\frac{d\vec{v}_1}{dt}\right]_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_O = \left[\frac{d\vec{v}_1}{dt}\right] + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underline{\vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}$$

$\left[\frac{d\vec{v}_1}{dt}\right] = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$; $\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$



O: terra, mamma

O': giostra, bambino

Studiamo il moto della mamma:

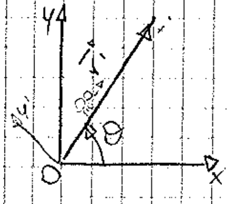
O(mamma): $\vec{v} = 0$, $\vec{a} = 0$

O'(bambino) vede la mamma girare di moto circolare uniforme con velocità angolare $-\vec{\omega}$

$\vec{v}' = (-\vec{\omega}) \times \vec{r}$

$\vec{a}' = -\vec{\omega} \times \vec{v}' = (-\vec{\omega}) \times (-\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{a}'} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{a}_{centripeta}} - \underbrace{2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{a}_{coriolis}} = 0$$



Una sbarra ruota con velocità $\vec{\omega}$ = cost
Un insetto si muove sulla sbarra con v' = cost → calcolare $\vec{v}$, $\vec{a}$ rispetto a O

O': $\vec{r}' = x' \vec{u}_x$

O: $\vec{r} = x' \cos\theta \, \vec{u}_x + x' \sin\theta \, \vec{u}_y$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt}\cos\theta + x'(-\omega \sin\theta)$$

$v_x = v' \cos\theta - \omega x' \sin\theta$

$v_y = \frac{dy}{dt} = v' \sin\theta + x \cos\theta \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}$

$\vec{u_r} = \cos\theta \, \vec{u_x} + \sin\theta \, \vec{u_y}$

$u_r \to u_\theta \; (\theta \to \theta + \pi/2)$

$\vec{u_\theta} = -\sin\theta \, \vec{u_x} + \cos\theta \, \vec{u_y}$

$\vec{v} = v_x \vec{u_x} + v_y \vec{u_y} =$

$= v' \cos\theta \, \vec{u_x} + v' \sin\theta \, \vec{u_y} + \omega x' (-\sin\theta \, \vec{u_x} + \cos\theta \, \vec{u_y}) =$

$= v' \vec{u_r} + \omega x' \vec{u_\theta} = \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$a_x = \frac{d}{dt} v_x = v'(-\omega \sin\theta) - \omega v' \sin\theta - \omega x'(\omega \cos\theta) =$

$= -2\omega v' \sin\theta - \omega^2 x' \cos\theta$

$a_y = v' \omega \cos\theta + \omega v' \cos\theta + \omega x'(-\omega \sin\theta) =$

$= 2\omega v' \cos\theta - \omega^2 x' \sin\theta$

$\vec{a} = 2\omega v' \underbrace{(-\sin\theta \, \vec{u_x} + \cos\theta \, \vec{u_y})}_{\vec{u_\theta}} - \omega^2 x' (\cos\theta \, \vec{u_x} + \sin\theta \, \vec{u_y}) =$

$= 2 \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\omega \sim 7{,}292 \times 10^{-5}$ rad/s

O in quiete $\vec{g_0} \longleftrightarrow \vec{a}$

O' in rotazione (terra) $\vec{g} \longleftrightarrow \vec{a'}$

$\vec{g} = \vec{g_0} - \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v'}}_{\text{coriolis}} - \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{a \text{ centrifuga}}$

$v' = 0$

eff. acc. centrifuga $\vec{g} = \vec{g_0} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\vec{g} = \vec{g_0} + \vec{a}_{cf}$ accelerazione efficace di gravità

$a_{cf} \ll g_0$

$3{,}4 \cdot 10^{-2}$ m/s²

$\vec{a}_{coriolis} = -2\vec{\omega} \times \vec{v'}$

>> spostamento verso est

corpo in caduta libera g

$$\int_{t_0}^{t}\omega\,dt = \int_{t_0}^{t}\frac{d\phi}{dt}\,dt = \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} d\phi = \phi(t) - \phi_0 \qquad \text{se } \omega = \text{costante}$$

$$\hookrightarrow \omega\int_{t_0}^{t} dt = \omega(t-t_0)$$

$$\boxed{\phi(t) = \phi_0 + \omega(t-t_0)}$$

se la velocità angolare non è costante nel tempo $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$

accelerazione angolare : $\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$

per moto circolare $v = R\omega$ $\quad a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

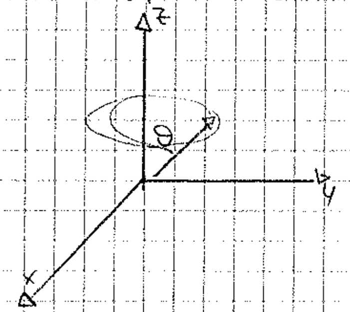
per moto circolare uniforme : $\alpha = 0 \Rightarrow a_T = 0$

$$\vec{a} = a_N \vec{u}_N \qquad \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

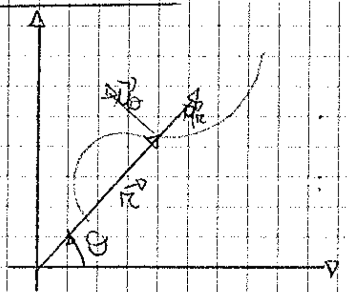
$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$|\vec{\omega}\times\vec{r}| = \omega r\cos\theta = \omega R$$

$$|\vec{a}| = |\vec{\omega}\times(\underbrace{\vec{\omega}\times\vec{r}}_{\perp\vec{\omega}})| = \omega^2 R$$



IN GENERALE

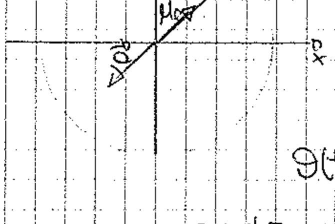


$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$\vec{a} = \omega^2 R\,\vec{u}_N$$

$$\vec{\omega} = \text{cost}$$



$$\vec{u}_N = -\vec{u}_R$$

$$\begin{cases} a_x = -\omega^2 R\cos\theta \\ a_y = -\omega^2 R\sin\theta \end{cases}$$

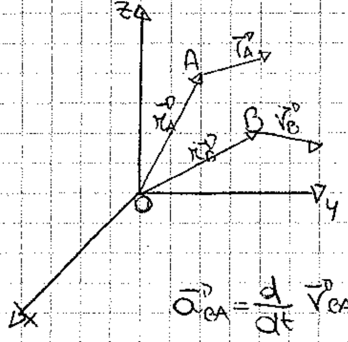
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t-t_0)$$

condizione al contorno $\begin{cases} \theta_0 = \theta(t_0) = 0 \\ r_0 = 0 \\ t_0 = 0 \end{cases}$

traiettoria $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

$$\forall t \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = R^2$$

VELOCITÀ RELATIVA



$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \qquad \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt}$$

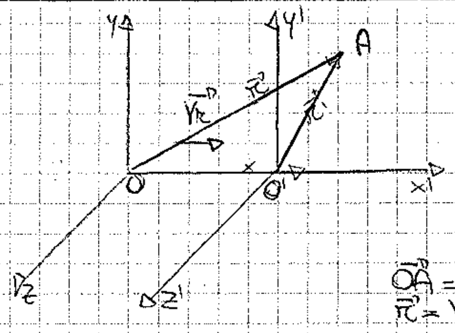
$$\vec{v}_{BA} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$ velocità relativa di B rispetto ad A

$$\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$$

$v \ll c \sim 300\,000$ km/s

$$\vec{a}_{BA} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} - \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

MOTO RELATIVO TRASLATORIO UNIFORME



$\vec{v}_r$ costante

$t = 0 \quad O \equiv O' \quad \Rightarrow \overline{OO'} = v_r \cdot t$

$$\vec{OA} = \vec{r}$$

$$\vec{O'A} = \vec{r}'$$

$$\vec{OA} = \vec{OO'} + \vec{O'A}$$

$$\vec{r} = \vec{v}_r t + \vec{r}'$$

In componenti: $\vec{v}_r = v_r \vec{u}_x$

$$\boxed{\begin{cases} x' = x - v_r t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}}$$

TRASFORMAZIONE GALILEIANA PER IL MOTO TRASLATORIO UNIFORME

Per velocità prossime alla luce TRASF. DI LORENTZ

$\rightsquigarrow$ MOTO VARIO

$$\frac{d}{dt}\vec{r}' = \vec{v}' = \frac{d}{dt}\vec{r} - \frac{d}{dt}(\vec{v}_r t)$$

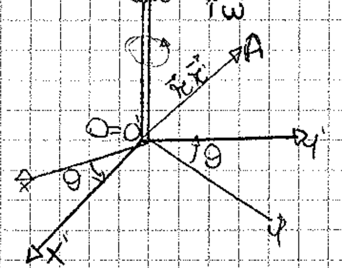
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_r \quad (\vec{v}_r \text{ costante}) \quad \text{in componenti} \begin{cases} v_x' = v_x - v_r \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases}$$

Per le accelerazioni: $$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{v} - \overbrace{\frac{d}{dt}\vec{v}_r}^{0} \qquad \boxed{\vec{a}' = \vec{a}}$$

$\Downarrow$

SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI

MOTO RELATIVO ROTATORIO UNIFORME



$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ costante

O osserva O' in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$

O' osserva O in rotazione con velocità angolare $-\vec{\omega}$

Consideriamo particella A in quiete rispetto a O'

vettore posizione $\begin{cases} \vec{r} \text{ visto da } O \\ \vec{r}' \text{ visto da } O' \end{cases}$

velocità di A: per O' $\vec{v}' = 0$

per O $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

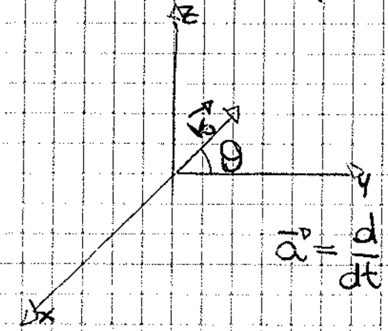
$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$\boxed{\vec v(t) = \vec v_0 + \vec a\,(t-t_0)}$$

il moto avviene su un piano identificato da $\vec v_0$ e $\vec a$

MOTO PARABOLICO

Palla di cannone lanciata da un punto sulla superficie della terra all'istante iniziale t_0 con velocità iniziale $\vec v(t_0)=\vec v_0$. Studiare la traiettoria della palla.



Scegliamo il sistema di riferimento:

$$\vec v_0 = v_{0y}\,\vec j + v_{0z}\,\vec k = v_0\cos\theta\,\vec j + v_0\sin\theta\,\vec k$$

$$\vec a = \vec g = -g\,\vec k$$

$$\vec a = \frac{d}{dt}\vec v = \frac{d^2}{dt^2}\vec r \qquad a_x = 0 = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \vec i$$

$$a_y = 0 = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \vec j$$

$$a_z = -g = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad \vec k$$

$$v_x - v_{0x} = \int dt\,\frac{dv_x}{dt} = 0 \rightsquigarrow v_x = v_{0x} = 0 \rightsquigarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x\,dt = x_0 = 0$$

$$v_y(t) - v_{0y} = \int dt\,a_y = 0 \rightsquigarrow v_y(t) = v_{0y}$$

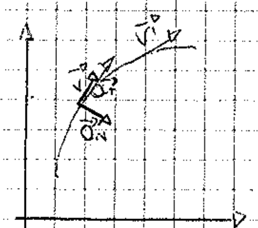
$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y\,dt = \underline{v_{0y}(t-t_0)} \qquad t - t_0 = \frac{y(t)}{v_{0y}}$$

$$\underline{z(t) = v_{0z}(t-t_0) - \tfrac{1}{2}g(t-t_0)^2} \qquad z(y(t)) = v_{0z}\frac{y}{v_{0y}} - \frac{1}{2}g\frac{y^2}{v_{0y}^2}$$

$$z(y=\rho) = 0 \qquad \rho = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$$

$$\vec v = \frac{ds}{dt}\vec u_T = v\,\vec u_T$$

$$\vec a = \frac{d}{dt}\vec v \qquad d\vec v = \vec v\,' - \vec v$$



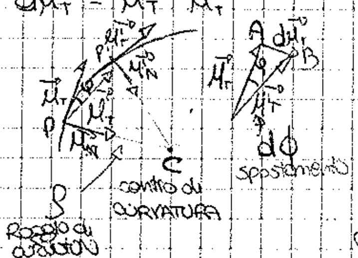
$$\vec a = \frac{d}{dt}(v\,\vec u_T) =$$

$$= \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec u_T}_{a_T} + \underbrace{v\frac{d\vec u_T}{dt}}_{a_N}$$

accelerazione tangenziale   a. centripeta

per moto rettilineo $\vec u_T$ è costante $\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec u_T = 0$

$$d\vec u_T = \vec u_T\,' - \vec u_T$$



$$|\vec u_T| = 1$$

$$|\vec v| = \sqrt{\vec v\cdot\vec v} \qquad \text{prodotto scalare}$$

$$|\vec u_T|^2 = 1 = \vec u_T\cdot\vec u_T$$

$$d(\vec u_T\cdot\vec u_T) - d(1) = 0 = d\vec u_T\cdot\vec u_T + \vec u_T\cdot d\vec u_T =$$

$$\boxed{= 2\,\vec u_T\cdot d\vec u_T = 0} \Rightarrow d\vec u_T \perp \vec u_T$$

$$d\vec u_T \parallel \vec u_N$$

$$\overline{AB} = |d\vec u_T| = 1\cdot d\phi \qquad \frac{d\vec u_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\cdot v$$

$$\phi(s(t))$$

$$\widehat{PP'} = ds = \rho\, d\phi$$
$$\frac{ds}{d\phi} = \frac{1}{\rho}$$
$$\vec{a}_N = v\frac{d\vec{\mu}_T}{dt} = v\frac{v}{\rho}\vec{\mu}_N = \boxed{\frac{v^2}{\rho}\vec{\mu}_N = \vec{a}_N}$$ ACCELERAZIONE CENTRIPETA

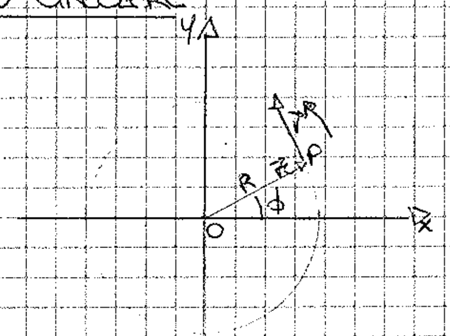
$$\frac{d\vec{\mu}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\vec{\mu}_N$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{\mu}_T}_{\vec{a}_T} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\vec{\mu}_N}_{\vec{a}_N}$$

moto rettilineo : $\rho \to \infty \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} \to 0$

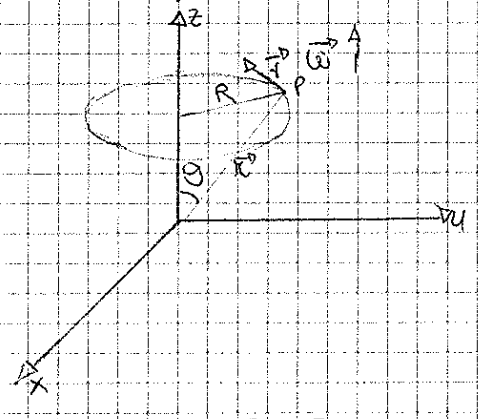
moto curvilineo uniforme: $|\vec{v}| =$ costante
$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow$$ solo accelerazione centripeta

MOTO CIRCOLARE



$$\overline{OP} = R$$
$$\vec{r} = R\cos\phi\,\hat{i} + R\sin\phi\,\hat{j}$$
$$s(t) = R\phi(t)$$
$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\phi}{dt} = R\omega$$
$$\frac{d\phi}{dt} = \omega$$ VELOCITÀ ANGOLARE $[\omega] = t^{-1}$ rad/s s^{-1}

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega\hat{k}}$$ r. regola della mano destra



$$v = \omega R = \omega r \sin\theta = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$\vec{\omega} =$ costante

periodo T: tempo necessario a percorrere un giro completo (rivoluzione)

frequenza ν: il numero di giri per unità di tempo

Se in Δt la particella fa n giri $\Rightarrow T = \frac{\Delta t}{n}$ $\quad \nu = \frac{n}{\Delta t} = \frac{1}{T}$

$[T] = t$ s

$[\nu] = t^{-1}$ $s^{-1} =$ Hz Hertz

$t_0 \quad v(t_0)=v_0 \;,\; x(t_0)=x_0$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

$\vec{v}, \vec{a}$ $\qquad \vec{u} \quad |\vec{u}|=1$

$|\vec{v}| = \left|\frac{dx}{dt}\right| \qquad \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}$ $\quad \vec{v}$ è sempre nella direzione del moto

$|\vec{a}| = \left|\frac{dv}{dt}\right| \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}$ $\quad \vec{a}$ è nella direzione del moto se è accelerato
è opposto al moto se è decelerato

$\vec{a} \upuparrows \vec{v}$ accelerato $\qquad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v}$ decelerato

- $a=0 \rightarrow v=v_0$ moto uniforme
- $a=a_0 \rightarrow v(t) = v_0 + a_0\int_{t_0}^{t} dt = v_0 + a_0(t-t_0)$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t}\left[v_0 + a_0(t-t_0)\right]dt =$$

$$= x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2$$

$$\rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x-x_0)$$

- $f(x)$ integrabile

$\varphi(t)$ differenziale in $[a,b]$ la cui immagine sia contenuta nel dominio

d $f(x)$: $\varphi(a)=x_a \qquad \varphi(b)=x_b$

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)\,dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\frac{d\varphi}{dt}\,dt \qquad \begin{cases} x=\varphi(t) \\ dx = \frac{d\varphi}{dt}\,dt \end{cases}$$

$$\int t e^{t^2}\,dt = \int \frac{1}{2}e^x\,dx$$

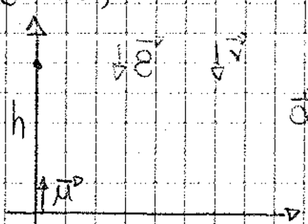
$t^2 = x$
$2t\,dt = dx$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0) \end{cases}$$

$t_0 = 2s$

$h = 4m$

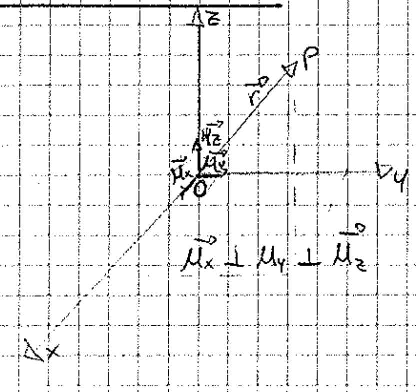


$\vec{a} = a\vec{u} \rightarrow a = -g$

$v_f = 8.85\ m/s$

$t = 2.9\ s$

MOTO CURVILINEO



versore $\vec{v}$, $\vec{u}$

$|\vec{u}| = 1$

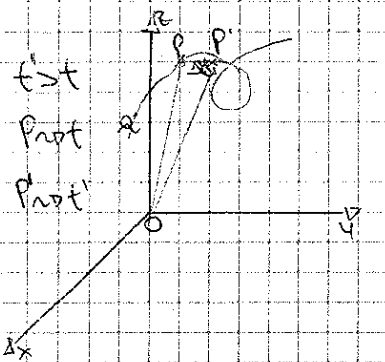
$\hat{i} \leftrightarrow \vec{u}_x$

$\hat{j} \leftrightarrow \vec{u}_y$

$\hat{k} \leftrightarrow \vec{u}_z$

$$\vec{r}(t) = \vec{OP} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} =$$
$$= (x(t), y(t), z(t))$$

$\vec{u}_x \perp u_y \perp \vec{u}_z$



$t' > t$

$P \to t$

$P' \to t'$

$\Delta t = t' - t$

$\widehat{PP'} = \Delta s$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t') - \vec{r}(t) = \vec{PP'}$ spostamento

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

LA VELOCITÀ È UN VETTORE CON DIREZIONE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

$\vec{u}_T$ versore nella direzione tangente

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = (\vec{u}_T)\overset{\frac{ds}{dt}}{(v)}$$ velocità scalare

spostamento lungo la traiettoria $s = \widehat{OP}$

Se conosco $\vec{v}$ (come vettore) $\to$ per integrazione posso ricavare $\vec{r}$

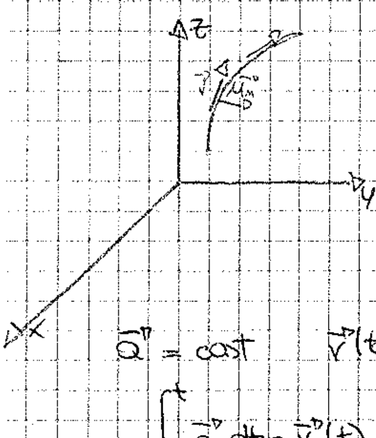
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \dots = \vec{v}_1 dt_1 + \vec{v}_2 dt_2 = \int_t^{t'} \vec{v}(t)\,dt$$

moto UNIFORME: $\vec{v} = \vec{v}_0$ in modulo e direzione

in questo caso $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt = \vec{v}_0 \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0)$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$\vec{u}_N \perp \vec{u}_T$



$\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$

$\Delta\vec{v} \Rightarrow \Delta\vec{v}\,\vec{u}_N$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} \xrightarrow{\text{integrazione}} \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{int}} \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$\vec{a} = \text{cost}$ $\quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ $\quad \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$

$$\int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 \quad \to \quad \vec{a}\int_{t_0}^{t} dt = \vec{a}(t - t_0)$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt \qquad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$