LABORATORIO

- PENDOLO $\rightsquigarrow$ statistica 6h
  $\rightsquigarrow$ elaborazione 6h
  $\rightsquigarrow$ relazione

- FILM $\rightsquigarrow$ orale
  $\rightsquigarrow$ teoria
  10/15 minuti

STATISTICA DEGLI ERRORI

$X = x_b \pm \delta x$

DISCREPANZA: differenza tra due diverse misure dello stesso fenomeno/oggetto

$$X = X_{best}\left(1 \pm \underbrace{\frac{\delta x}{|x_b|}}_{\text{ERRORE RELATIVO}}\right)$$

INCERTEZZA - SOMMA

$x = x_b \pm \delta x$

$y = y_b \pm \delta y$

$p = x + y \rightsquigarrow \delta p$

$$p_{max} = (x_b + y_b) + (\delta x + \delta y)$$

$$p_{min} = (x_b + y_b) - (\delta x + \delta y)$$

$$\boxed{p = p_b \pm \delta_b = (x_b + y_b) \pm (\delta x + \delta y)} \longrightarrow \boxed{\delta p = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + \ldots}}$$

approssimato — rigoroso

INCERTEZZA - PRODOTTO

$p = x \cdot y$

$$x = x_b\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_b|}\right)$$

$$y = y_b\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y_b|}\right)$$

$$p_{max} = x_b y_b\left(1 + \frac{\delta x}{|x|}\right)\left(1 + \frac{\delta y}{|y|}\right) =$$

$$= x_b y_b\left(1 + \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} + \underbrace{\frac{\delta x}{|x|}\frac{\delta y}{|y|}}_{\to 0}\right) =$$

$$= x_b y_b\left(1 + \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|}\right)$$

$$p_{min} = x_b y_b\left(1 - \frac{\delta x}{|x|} - \frac{\delta y}{|y|}\right)$$

$$\boxed{\frac{\delta p}{|p|} \sim \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|}} \longrightarrow \boxed{\frac{\delta p}{|p|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{|x|}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{|y|}\right)^2 + \ldots}}$$

approssimato — rigoroso

$$\left(\frac{\delta p}{|p|}\right)_{approssimato} \geq \left(\frac{\delta p}{|p|}\right)_{rigoroso}$$

INCERTEZZA - COSTANTE

B costante

$x = x_b \pm \delta x$

$q = B x$

$$\frac{\delta B}{|B|} = 0 \qquad \frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|}\, q = \frac{\delta x}{|x|} \cdot Bx$$

$$\boxed{\delta_q = B \cdot \delta x}$$

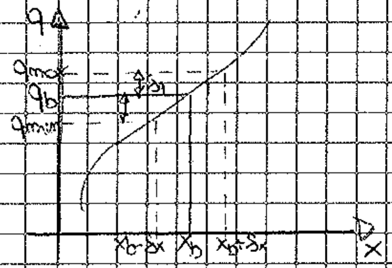
$d = (5.0 \pm 0.1)\,cm$

$C = \pi \cdot d = (15.7 \pm 0.3)\,cm$

INCERTEZZA - FUNZIONI

$q = f(x)$

$x = x_b \pm \delta x$



$$\delta q = f(x_b + \delta x) - f(x_b) = \left|\frac{df}{dx}\right| \delta x$$

$$\boxed{\delta q = \left|\frac{df}{dx}\right| \delta x}$$

$y = f(x) = x^2$

$x = x_b \pm \delta x = (10 \pm 1)\,m$

$$\delta y = \left|\frac{d(x^2)}{dx}\right| \delta x = |2x|\, \delta x = 20$$

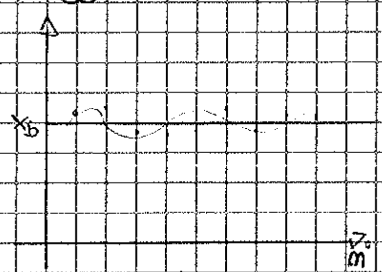
$$y = y_b \pm \delta y = (100 \pm 20)\,m^2$$

ERRORI

$x = x_b \pm \delta x$ $\qquad N \to \infty$

$q = x + y \qquad q = xy$

δq



- sistematico
- casuali, piccoli

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} = \frac{1}{N} \sum x_i \qquad \text{MEDIA}$$

$$d_i = x_i - \bar{x} \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(d_i)^2}{N}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum(x_i-\bar{x})^2}$ sigma $\qquad \sigma_x$ = DEVIAZIONE STANDARD

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(x_i-\bar{x})^2}}$$

sigma migliorata

dice qual è la probabilità che la prox misura (in un n° grande di misure) cada tra: $\bar{x} - \sigma_x \le x \le \bar{x} + \sigma_x$

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}}$$

$$\delta x = \left((\delta x_{casuale})^2 + (\delta x_{sistematico})^2\right)^{1/2}$$

DISTRIBUZIONI

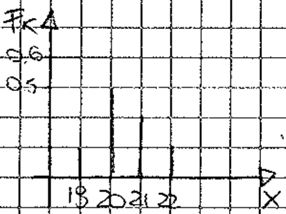
x_i	x_k	m_k
20	18	1
21	19	1
22	20	3
19	21	2
20	22	1
20		
21		

- ERRORI CASUALI PICCOLI NO ERRORI SISTEMATICI
- $N \to \infty$

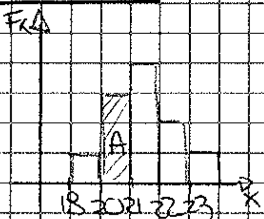
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i = \frac{1}{N}\sum x_k m_k$$

$F_k = \frac{m_k}{N}$ frequenza

$\boxed{\sum_{k=1}^{N} F_k = 1}$ condizione di NORMALIZZAZIONE



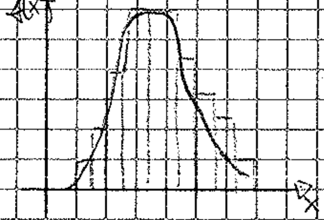
ISTOGRAMMA A BARRE



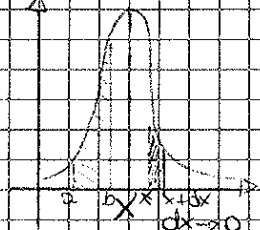
ISTOGRAMMA A INTERVALLI Δk

$A = \Delta_k F_k = 1$

probabilità che esca un numero



$N \to +\infty$
$\Delta k \to 0$



$A = f(x)dx$

$P = \int_a^b f(x)dx$

n° di misure che cadono tra a e b

CAMPANA GAUSS NORMALE

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$ condizione di NORMALIZZAZIONE

$\bar{x} = \sum_k x_k F_k \qquad F_k = f(x_k)dx_k \qquad dx_k \to 0$

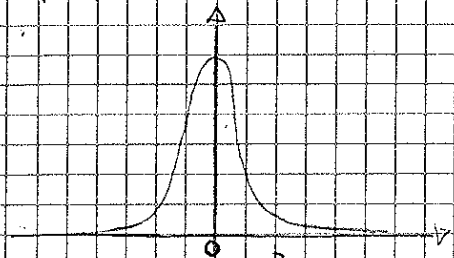
$\boxed{\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx}$ media $N \to +\infty$

$\boxed{\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)dx}$ VARIANZA

deviazione standard al quadrato

$\lim_{N \to \infty} \bar{x} = X$

- $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$



- σ grande → gaussiana bassa
- σ piccolo → gaussiana alta
- $f(x) = f(-x)$

- $f(x) = N e^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}} = N \exp\left(-(x-X)^2 / 2\sigma^2\right)$

$$1 = N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx = N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = N\sigma \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz}_{\sqrt{2\pi}} = \sigma N \sqrt{2\pi} = 1$$

$y = x - X$ $\quad$ $dx = dy$ $\qquad$ $y/\sigma = z$ $\quad$ $dy = \sigma dz$

$$\boxed{N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}}$$

$$f(x) = G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, G_{X,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int x\, e^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-X)^2 G_{X,\sigma}(x) dx$$

$x - X = y \quad dx = dy$

$$\bar{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (y+X) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy}_{\text{dispari} \, = 0} + X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy}_{\sigma\sqrt{2\pi}} \right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} (X \sigma\sqrt{2\pi}) = X$$

$\boxed{\bar{x} = X}$ $\quad N \to +\infty$

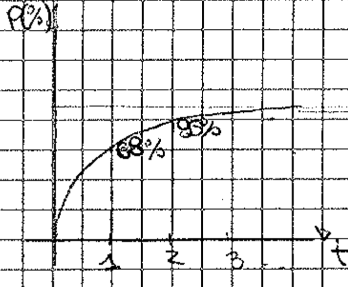
$\bar{x} \sim X \quad$ N grande

deviazione standard

$X = x_b \pm \delta_x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$

$$P(X - \sigma < x < X + \sigma) = \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} G_{X,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx = \overset{\text{entro un sigma}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-z^2/2} dz} \to \overset{\text{entro } t \text{ sigma}}{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-z^2/2} dz}_{\text{FUNZIONE DEGLI ERRORI } \operatorname{erf}(x)}}$$

$\frac{x-X}{\sigma} = z \quad dx = \sigma dz$



$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ $\quad$ c'è la probabilità del 68% che una nuova misura cada nell'intervallo $\bar{x} - \sigma_x < x < \bar{x} + \sigma_x$

$x = \bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$ $\quad$ c'è la probabilità del 95% che una nuova misura cada nell'intervallo $\bar{x} - 2\sigma < x < \bar{x} + 2\sigma$

P(entro 3σ) = 99,73%

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N} \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

GAUSS

$$SDOM = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \qquad \text{incertezza relativa} = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}}$$

incertezza sul valore vero

- $g_0 = (9.5 \pm 0.1)\ m/s^2$
  $g = (9.8 \pm 0.1)\ m/s^2$

$$t = \frac{|9.8 - 9.5|}{0.1} = 3 \rightarrow \text{n° di deviazioni standard}$$

0.3%

- $x = [3.8 \quad 3.5 \quad 3.9 \quad 3.9 \quad 3.4 \quad 1.8] \qquad N = 6$

$\bar{x}_6 = 3.4$

$\bar{x}_5 = 3.7$ scartando il 6° dato

$$P(\text{fuori } 2\sigma) = 1 - P(\text{entro } 2\sigma) = 1 - 0.95 = 5\% = \frac{1}{20}$$

n° di misure cattive del tipo di 1.8 $=$ n° misure $\cdot P(\text{fuori } 2\sigma) = 6 \cdot 0.05 = 0.3$

$$N \rightarrow \bar{x}, \sigma \qquad t_{x_{sospetto}} = \frac{|x_{sos} - \bar{x}|}{\sigma}$$

CRITERIO DI CHAUVENET

$$P(\text{fuori } t_{x_{sos}}\sigma)$$

$$n = N \cdot P(\text{fuori } t_{sos}\sigma)$$

$n < \frac{1}{2}$ rigetto del dato

$n \geq \frac{1}{2}$ si accetta il dato

$$\bar{x}_p \left(\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_B}{\sigma_B^2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}\right) = \frac{x_A w_A + x_B w_B}{w_A + w_B} \qquad w_A = \frac{1}{\sigma_A^2} \quad w_B = \frac{1}{\sigma_B^2}$$

MEDIA PESATA

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i} \qquad \sigma_p = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = \left(\sum_i w_i\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

- $R_1 = 11 \pm 1\ \Omega \qquad w_1 = 1$
  $R_2 = 12 \pm 1 \qquad w_2 = 1$
  $R_3 = 10 \pm 3 \qquad w_3 = 1/9$

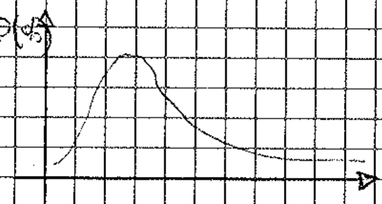
$$\Rightarrow \bar{x}_p = \frac{1 \cdot 11 + 1 \cdot 12 + \frac{1}{9} 10}{1 + 1 + \frac{1}{9}} = 11.02\ \Omega$$

$$\sigma_p = 0.69\ \Omega$$

DISTRIBUZIONE DI POISSON

$$\boxed{P_\mu(\nu) = e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!}}$$

$\mu \rightarrow$ numero di casi / unità di tempo



non è simmetrica

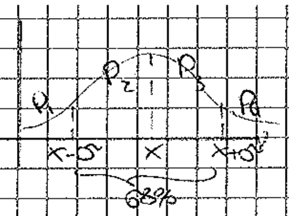
$\nu \pm \sqrt{\nu}$

σ

emissione di particelle α

$P_{1.5}(3) \qquad \mu = 1.5\ \alpha/min \cdot 2\,min = 3\alpha$

$$P_3(\nu) = e^{-3} \frac{3^\nu}{\nu!} \qquad P_3(3) = e^{-3} \frac{3^3}{3!} = 0.22 \rightarrow \text{probabilità che siano emesse 3 particelle}$$



probabilità $E_k = N \cdot P_k$

n° intervalli	O_k	$E_k = N \cdot P_k$
1	8	6.4
2	10	13.6
3	16	13.6
4	6	6.4

$$\chi^2 = \sum_k^m \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

se $\chi^2 = 0$ ⇝ gaussiana

se $\chi^2 << m$ ⇝ accordo

$\chi^2 >> m$ no accordo

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{d}$$

d = n° di gradi di libertà = m − c

c = n° dei vincoli = n° parametri devono essere calcolati per determinare E_k (χ^2) a partire da O_k

$N = \sum O_k$ $E_k = N P_k$ N: 1° vincolo; $\bar{x}$: 2° "; σ: 3° "

$\tilde{\chi}^2 = 1$ ⇝ gaussiana   ma viene $\tilde{\chi}^2 = 1.8$

$$P(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}^2_0) = P(\tilde{\chi}^2 \geq 1.8) \sim 0.01$$

5% = 0.05

SCRIVERE UNA RELAZIONE

- INTRO:
  - scopo (ε)
  - metodologia (pendolo)
  - teoria (formule, breve derivazione)
  - discussione ⇝ se lo riteniamo necessario

$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$

- DESCRIZIONE ESPERIMENTO:
  - strumenti
  - esperienza
- PUBBLICAZIONE DATI: - riportare i dati in maniera opportuna
- ANALISI DATI:
  - risultato
  - propagazione errori
- CONCLUSIONI + DISCUSSIONE