GRAVITAZIONE

Tolomeo ~ Copernico ~ Ticho Brahe

KEPLERO: (I) i pianeti descrivono orbite ellittiche, di cui il sole occupa uno dei fuo

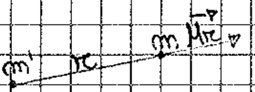
(II) il vettore posizione di ogni pianeta rispetto al sole descrive, nella sua orbita ellittica, aree uguali in tempi uguali

$$\frac{dA}{dt} = \text{costante}$$

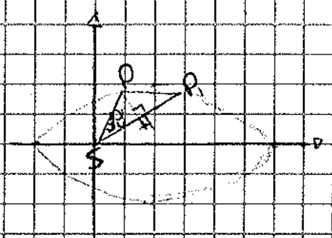
(III) i quadrati dei periodi di rivoluzione T sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite ellittiche

$$T^2 = k a^3$$

NEWTON: dinamica del moto dei pianeti



• $\frac{dA}{dt} = \text{cost} \longleftrightarrow$ forza centrale



Area $(SPP') = \frac{1}{2} SP \cdot PH$

$\overline{SP} = r \qquad \overline{PH} \sim PP' = r\,d\theta$

$A(SPP') = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt$

$A(SPP') = dA \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante}$

$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2m \frac{dA}{dt} \Rightarrow \vec{L} = \text{costante} \Rightarrow \vec{F}$ centrale

$\vec{F} = F \vec{u}_r$

• $F \propto m$, $F \propto m'$ $\Rightarrow F \propto m m' \rightarrow F = m m' f(r) \vec{u}_r$

$f(r) \propto \frac{1}{r^2}$ attrattiva

$$\boxed{\vec{F}(r) = -G \frac{m m'}{r^2} \vec{u}_r}$$

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \rightarrow \frac{m^3}{kg\, s^2}$ COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

PROCEDIMENTO DI NEWTON

1) orbita circolare (caso particolare) → sole è nel centro

$\vec{F}(r) = -F(r)\vec{u}_r \Rightarrow$ è forza centripeta $\rightarrow F_c = \frac{m v^2}{r} = m \omega^2 r$

per orbita circolare $a = r \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$F_c = m \frac{4\pi^2}{T^2} r = m \frac{4\pi^2}{k r^3} r$

3) $T^2 = k a^3 \rightarrow T^2 = k r^3$

FORZA TERRA-LUNA: $F_{TL} = G\frac{m_T m_L}{r_{TL}^2} = m_L a_{cp}$

2° legge Newton

FORZA TERRA-TERRA: $F_{TT} = G\frac{m_T m}{R_T^2} = mg$

$$\frac{F_{TT}}{F_{TL}} = \frac{m}{R_T^2}\cdot\frac{r_{TL}^2}{\cancel{m_L}} = \frac{m g}{\cancel{m_L}\, a_{cp}} \Rightarrow \frac{g}{a_{cp}} = \left(\frac{r_{TL}}{R_T}\right)^2 \simeq (60)^2$$

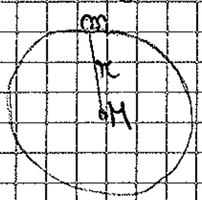
$$\boxed{F = G\frac{m\, m_T}{(R_T+h)^2}}$$

$R_T \simeq 6.37 \times 10^6\ m$

$g = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9.81\ m/s^2$ $\quad g = \left(\frac{m_G}{m_I}\right) G\frac{m_T}{R_T^2}$

ma tutti i corpi cadono con lo stesso accelerazione (in assenza di attriti) $\Rightarrow m_G = m_I$

$F_G = m a_c$ $\quad M >> m$



T periodo rivoluzione

M?

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$M = \frac{4\pi^2}{G}\cdot\frac{r^3}{T^2}$$

$\vec{F}(r) = F(r)\,\vec{u}_r$ → è conservativa $\Rightarrow E_p(r)$

$$F(r) = -\frac{\partial E_p}{\partial r} = -\frac{dE_p}{dr}$$

$$F(r) = -G\frac{mm'}{r^2} = -\frac{dE_p}{dr} \Rightarrow \boxed{E_p(r) = -G\frac{mm'}{r} + c}$$

$$\boxed{E_p(r \to \infty) \to 0 \Rightarrow c = 0}$$

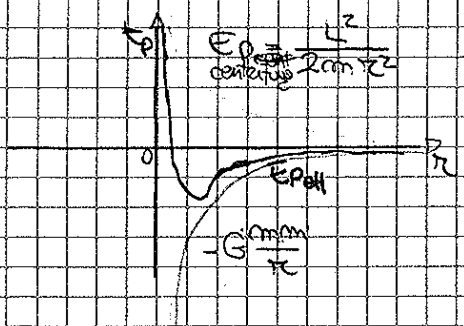
$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 - G\frac{mm'}{r}$ = costante

$m' >> m \Rightarrow m + m' \sim m'$, $\mu \sim m \Rightarrow$ in sistema CM $v' = 0$

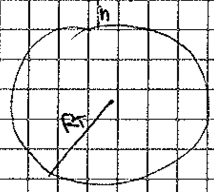
in questo S.R. $\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm'}{r} = \text{costante}}$

$$G\frac{mm'}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = G\frac{m'}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{mm'}{r}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm'}{r} = \frac{1}{2}G\frac{mm'}{r} - G\frac{mm'}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{mm'}{r} < 0$$



- per $E < 0$ orbite chiuse → ellisse
- $E = 0$ parabolico
- $E > 0$ iperbole



$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{m m_T}{R_T + h}$$

VELOCITÀ DI FUGA $\Rightarrow v_0$ minimo : il satellite raggiunge $r \to \infty$

$$E = 0 \to \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2 G m_T}{R_T + h}}} = 1,13 \times 10^4 \; m/s$$